

**WYKORZYSTANIE MODELI AUTOREGRESJI DO
PROGNOZOWANIA SZEREGU CZASOWEGO ZWIĄZANEGO
ZE SPRZEDAŻĄ ASORTYMENTU HUTNICZEGO**

J. SZYMSZAL¹, J. PIĄTKOWSKI², A. GIĘREK³, A. PUCKA⁴
Politechnika Śląska, 40-019 Katowice, ul. Krasińskiego 8

STRESZCZENIE

W artykule przedstawiono metodykę prognozowania szeregu czasowego wykazującego wahania sezonowe, metodą autoregresji. Prognozowania dokonano dla szeregu czasowego, w czasie 5 dni (od poniedziałku do piątku), ujmującego wielkość sprzedaży wybranego asortymentu hutniczego. Przedstawiona metoda charakteryzuje się dużą dokładnością i może stanowić podstawę planowania wielkości sprzedaży, która jest nieodzownym czynnikiem współczesnych rozwiązań ekonomicznych.

Key words: autoregression, logistic, methodology of predicting, time series

1. WSTĘP

Rozpatrywany szereg czasowy to ciąg uporządkowanych obserwacji dokonanych w pewnym okresie czasu, na zmieniającej się w tym okresie wartości sprzedaży wybranego asortymentu hutniczego dokonanych w pewnym okresie czasu [1]. Zastosowany do prognozowania szeregu czasowego model autoregresji, zaliczany jest do bardzo ogólnej klasy modeli szeregów czasowych, a ich budowa oparta jest na zjawisku autokorelacji tzn. na korelacji wartości zmiennej prognozowanej z wartościami tej samej zmiennej opóźnionymi w czasie.

Konstrukcja modeli jest oparta na podstawowym założeniu, że występuje autokorelacja między wartościami zmiennej prognozowanej, a jej wartościami opóźnionymi w czasie. Istotnym problemem przy budowaniu modeli autoregresyjnych dla wahań sezonowych jest skracanie szeregu obserwacji, wykorzystanych do szacowania jego parametrów. Aby więc dokonać poprawnej estymacji modelu i uzyskać trafne prognozy, szereg czasowy powinien być odpowiednio długi, co w praktyce może nastęczać wielu problemów [2].

¹ Dr inż., e-mail: jan.szyszal@polsl.pl

² Dr inż., e-mail: jaroslaw.piatkowski@polsl.pl

³ Prof. zw. dr. hab. inż.

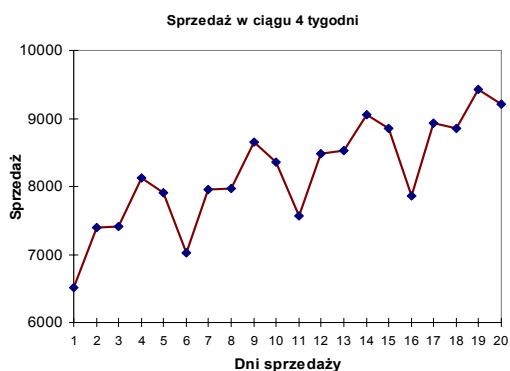
⁴ Dr inż.

2. METODYKA BADAWCZA

Obliczenia, dotyczące prognozowania szeregu czasowego wielkości sprzedaży wykazującego wahania sezonowe, metodą autokorelacji przeprowadzono w arkuszu kalkulacyjnym Microsoft Excel.

W pierwszej kolejności wykonano wykres szeregu czasowego (rys. 1). Na podstawie tego wykresu można wstępnie określić jego przebieg i strukturę, z której wynika, że szereg ten charakteryzuje się wahaniami sezonowymi w ciągu tygodnia, czyli w ciągu 5 dni (od poniedziałku do piątku).

	A	B	C
1	Dzień tyg.	Nr	Sprzedaż
2	pon.	1	6510
3	wtorek	2	7390
4	środa	3	7406
5	czwartek	4	8119
6	piątek	5	7910
7	pon.	6	7020
8	wtorek	7	7951
9	środa	8	7973
10	czwartek	9	8648
11	piątek	10	8350
12	pon.	11	7560
13	wtorek	12	8480
14	środa	13	8533
15	czwartek	14	9054
16	piątek	15	8853
17	pon.	16	7859
18	wtorek	17	8932
19	środa	18	8855
20	czwartek	19	9430
21	piątek	20	9211



Rys. 1. Dane wielkości sprzedaży wraz z wykresem szeregu czasowego

Fig. 1. Selling volume data with the relevant graph

Zastosowanie modelu autokorelacyjnego, wynikało głównie z potrzeby znalezienia zależności pomiędzy wartościami w bieżącym przedziale czasowym, a wartościami odpowiedniego przedziału wstecz. Z analizy wahań sezonowych mających miejsce w danym szeregu czasowym można wnioskować, że wartość sprzedaży z miesiąca piątego koreluje z wartościami sprzedaży z miesięcy: 10, 15 i 20. W związku z tym dla omawianego przypadku należy zastosować model autokorelacji typu $AR(5)$, który można opisać zależnością:

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-5} + \xi_t \quad (1)$$

gdzie:

y_t, y_{t-1}, y_{t-5} – wartości zmiennej prognozowanej w okresie $t, t-1, t-5$.

$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ – parametry modelu.

ξ_t – zmienna losowa.

Składowe modelu $AR(5)$ uzyskano przez skopiowanie wartości sprzedaży pierwotnego szeregu czasowego o jedną wartość (składowa WSTECZ 1) oraz o pięć wartości (składowa WSTECZ 5) (rys.2a). Następnie, usunięto wiersze zawierające dane wartości

sprzedaży dla pierwszych czterech dni, uzyskując w ten sposób wejściowe dane do oszacowania współczynników modelu autokorelacji $AR(5)$ (rys 2b). Zmienne wykorzystywane w autoregresji $AR(5)$ (w modelu regresji wielorakiej) obejmują jako zmienne niezależne wartości sprzedaży przesunięte o jeden dzień (WSTECZ 1) oraz o pięć dni (WSTECZ 5) w stosunku do szeregu pierwotnego. Za zmienną zależną przyjęto natomiast wartość sprzedaży dla szeregu pierwotnego. Po przygotowaniu danych uruchamia się **NARZĘDZIE – REGRESJA**, którego wypełnione okno dialogowe, do rozwiązywania omawianego przykładu, przedstawiono na rys.3.

a)

	A	B	C	D	E
1	Dzień tyg.	Nr	Sprzedaż	WSTECZ 1	WSTECZ 5
2	pon.	1	6510		
3	wtorek	2	7390	6510	
4	środa	3	7406	7390	
5	czwartek	4	8119	7406	
6	piątek	5	7910	8119	
7	pon.	6	7020	7910	6510
8	wtorek	7	7951	7020	7390
9	środa	8	7973	7951	7406
10	czwartek	9	8648	7973	8119
11	piątek	10	8350	8648	7910
12	pon.	11	7560	8350	7020
13	wtorek	12	8480	7560	7951
14	środa	13	8533	8480	7973
15	czwartek	14	9054	8533	8648
16	piątek	15	8853	9054	8350
17	pon.	16	7859	8853	7560
18	wtorek	17	8932	7859	8480
19	środa	18	8855	8932	8533
20	czwartek	19	9430	8855	9054
21	piątek	20	9211	9430	8853

b)

	A	B	C	D	E
1	Dzień tyg.	Nr	Sprzedaż	WSTECZ 1	WSTECZ 5
2	pon.	6	7020	7910	6510
3	wtorek	7	7951	7020	7390
4	środa	8	7973	7951	7406
5	czwartek	9	8648	7973	8119
6	piątek	10	8350	8648	7910
7	pon.	11	7560	8350	7020
8	wtorek	12	8480	7560	7951
9	środa	13	8533	8480	7973
10	czwartek	14	9054	8533	8648
11	piątek	15	8853	9054	8350
12	pon.	16	7859	8853	7560
13	wtorek	17	8932	7859	8480
14	środa	18	8855	8932	8533
15	czwartek	19	9430	8855	9054
16	piątek	20	9211	9430	8853

Rys. 2. Wielkość sprzedaży (a) wraz z danymi do utworzenia modelu $AR(5)$ (b)
Fig. 2. Sales amount (a) including data for making the model $AR(5)$ (b)

a)

b)

PODSUMOWANIE - WYJŚCIE					
Statystyki regresji					
Wielokrotność R				0,9953	
R kwadrat				0,9906	
Dopasowany R kwadrat				0,9890	
Błąd standardowy				69,72	
Obserwacje				15	
ANALIZA WARIANCJI					
	df	SS	MS	F	
Regresja	2	6124464,599	3062232	630,0637	
Resztkowy	12	58322,33461	4860,195		
Razem	14	6182786,933			
Współczynniki Błąd standardowy t Stat Wartość-p					
Przecięcie		1370,7	261,9	5,2	0,0002
WSTECZ 1		-0,0804	0,0341	-2,3578	0,0362
WSTECZ 5		0,9705	0,0309	31,38	0,0000

Rys. 3. Wypełnione okno dialogowe *Regresja* (a) oraz uzyskane wyniki (b)
Fig. 3. Completed dialogue window of *Regression* tool (a) with fragment of results (b)

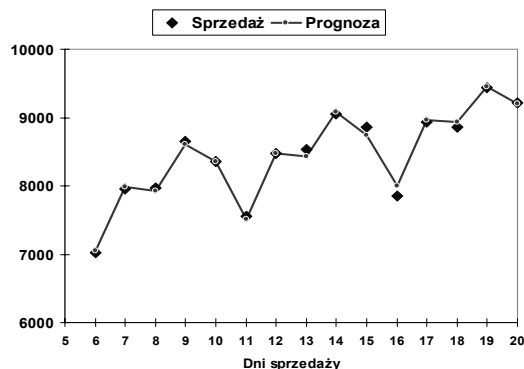
W oparciu o uzyskane wyniki stwierdzono, że:

- Standardowy błąd estymacji wynosi ok. **69,72** (komórka I7). Błąd ten można wiązać z prognozą za pomocą autoregresyjnego modelu.
- Wartość współczynnika R^2 (komórka I5) wskazuje, że około **99,06%** odchylen wartości sprzedaży można wyjaśnić za pomocą uzyskanego modelu AR(5).
- Uzyskane wartości poziomu istotności p są dla przyjętych zmiennych objaśniających (WSTECZ 1 oraz WCTECZ 5 - komórki H18:H19) dużo mniejsze od 0,05 i wskazują na istotną zależność między każdą z tych zmiennych, a wielkością sprzedaży.
- Uzyskany model opisany jest ostatecznie następująco:

$$\text{Wielkość sprzedaży} = 1370,7 - 0,0804 \text{ WSTECZ 1} + 0,9705 \text{ WSTECZ 5}$$

Dla wykonania wykresu prognozy *ex post* wykorzystano dane umieszczone w bloku SKŁADNIKI RESZTOWE - WYJŚCIE przez NARZĘDZIE REGRESJA (rys.4a). Należy dodać, że wartości przewidywanej sprzedaży można też wyznaczyć wykorzystując wyznaczony model funkcji regresji wielorakiej. Wykres prognozy *ext-post* przedstawiono na rys.4b.

	H	I	J	K
23	SKŁADNIKI RESZTOWE - WYJŚCIE			
24				
25	Obszewacja	Przewidywane Sprzedaż	Składniki resztowe	składniki resztowe
26	1	7053,11	-33,11	-0,5130
27	2	7978,70	-27,70	-0,4291
28	3	7919,41	53,59	0,8303
29	4	8609,83	38,37	0,5946
30	5	8352,54	-2,54	-0,0394
31	6	7512,72	47,28	0,7325
32	7	8479,77	0,23	0,0036
33	8	8427,18	105,82	1,6394
34	9	9078,03	-24,03	-0,3723
35	10	8746,94	106,06	1,6432
36	11	7996,38	-137,38	-2,1285
37	12	8969,15	-37,15	-0,5755
38	13	8934,35	-79,35	-1,2295
39	14	9446,19	-16,19	-0,2508
40	15	9204,90	6,10	0,0945



Rys. 4. Wartości przewidywanej sprzedaży wraz ze składnikami resztowymi (a) oraz wykres prognozy *ex-post* (b)

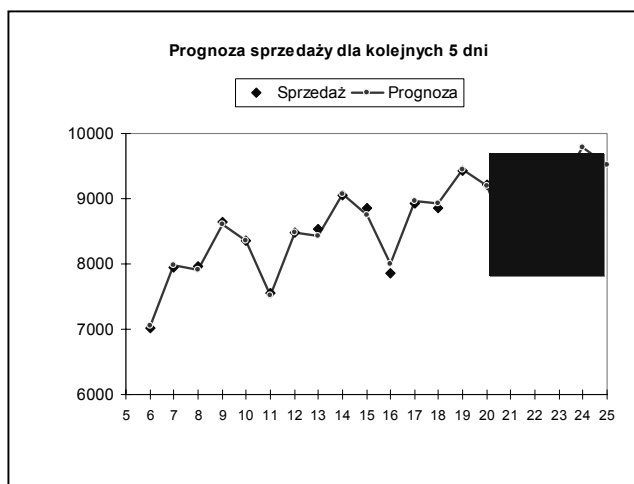
Fig. 4. Value of the expected selling with the rest elements (a) with graph of predicting (b)

Przedstawiona metoda nadaje się jedynie do określenia wielkości prognozy *ex post*. W przypadku, gdy chce się uzyskać prognozę *ex ante*, dla kolejnych 5 dni sprzedaży należy zbudować odpowiednie formuły wykorzystujące obliczone współczynniki funkcji regresji (blok komórek F17:F21 - rys.5).

	A	B	C	D	E	F
1	Dzień tyg.	Nr	Sprzedaż	WSTECZ 1	WSTECZ 5	Prognoza
2	pon.	6	7020	7910	6510	7053,1
3	wtorek	7	7951	7020	7390	7978,7
4	środa	8	7973	7951	7406	7919,4
5	czwartek	9	8648	7973	8119	8609,6
6	piątek	10	8350	8648	7910	8352,5
7	pon.	11	7560	8350	7020	7512,7
8	wtorek	12	8480	7560	7951	8479,8
9	środa	13	8533	8480	7973	8427,2
10	czwartek	14	9054	8533	8648	9078,0
11	piątek	15	8853	9054	8350	8746,9
12	pon.	16	7859	8853	7560	7996,4
13	wtorek	17	8932	7859	8480	8969,1
14	środa	18	8855	8932	8533	8934,4
15	czwartek	19	9430	8855	9054	9446,2
16	piątek	20	9211	9430	8853	9204,9
17	pon.	21				8257,8
18	wtorek	22				9375,8
19	środa	23				9211,2
20	czwartek	24				9782,5
21	piątek	25				9524,0

Rys. 5. Wyznaczenie prognozy w oparciu o obliczone wartości współczynników regresji
 Fig. 5. Outlining calculated based on for value of rates for the regression

Na podstawie uzyskanych wyników, w końcowym etapie wykonuje się wykres, na którym dodatkowo ujmuje się prognozę dotyczącą kolejnych pięciu dni sprzedaży (tzw. prognozę *ex ante*), co przedstawiono na rys.6.



Rys. 6. Prognoza sprzedaży dla kolejnych 5 dni
 Fig. 6. Selling predicting for 5 consecutive days

3. PODSUMOWANIE

Przedstawiona metoda prognozowania szeregów czasowych wykazujących wahania sezonowe może być zastosowana zarówno w procesie prognozowania wielkości sprzedaży, jak i popytu. Po dokonaniu oszacowania parametrów modelu oraz odpowiedniej jego weryfikacji można go użyć do celów prognostycznych. Aby uzyskać przyszłą wartość prognozowanej sprzedaży, należy jedynie podstawić do modelu jej wartości z poprzednich okresów. Tak więc konstrukcja prognoz, dotyczących dalszych okresów, ma charakter rekurencyjny, polegający na wykorzystaniu do obliczeń prognoz z poprzednich okresów.

LITERATURA

- [1] Middleton M.R.: Microsoft Excel w analizie danych. Wyd. RM, Warszawa (2004).
- [2] Dittman P.: Prognozowanie w przedsiębiorstwie. Oficyna Ekonomiczna, Kraków (2004).

THE APPLICATION OF AUTOREGRESSION MODELS FOR PROGNOSTICATION OF THE TIME SERIES RELATED TO SALES OF METALLURGICAL PRODUCT RANGE

SUMMARY

Presented in the article is a methodology of prognostication of the time series showing seasonal fluctuations, with applying an autoregression method. The prognostication has been made for the time series in the course of 5 days, from Monday to Friday, covering an amount of sales of a selected metallurgical product tem. The method presented is distinguished for a high accuracy and it can provide a basis be applied in planning the scale of sales which is an indispensable factor in modern economics solutions.

Recenzował: Prof. Franciszek Binczyk