

Jadwiga Kidawa-Kukla  
Ryszard Parkitny

## RÓWNANIA MECHANIKI KRZEPNIĘCIA ODLEWU LEPKOSPĘŻYSTEJ TARCZY

### Wstęp

W dotychczasowych badaniach własności mechanicznych metali w zakresie temperatur krzepnięcia przeważają prace ujmujące te własności w sposób globalny. Najczęściej ich miernikiem jest wytrzymałość na rozciąganie i przewężenie. Wiadomo, że próba rozciągania służy do oceny podstawowych miar mechanicznych materialu odlewu: sprężystości, plastyczności i lepkości. Miary te wyrażone jako funkcje temperatury i prędkości odkształcenia określają charakter związków konstytutywnych.

W ogólnym przypadku obok cech sprężystych metali w temperaturach krzepnięcia zauważa się równoważny udział efektów lepkich. Tendencje takiej oceny metali zawarto w rozważaniach teoretycznych, jak i w badaniach doświadczalnych [2, 7, 12].

W celu uwzględnienia czasowej zmienności właściwości mechanicznych krzepnących metali traktuje się je jako ciała lepkospężyste.

### 1. Zagadnienie krzepnięcia odlewu sprężystego

Równania przemieszczeniowe opisujące stan przemieszczenia  $u(x_1, t)$  i pośrednio stan naprężenia  $\sigma_{ij}(x_1, t)$  krzepnącego odlewu sprężystego otrzymuje się wyrażając różniczkowe równania równowagi przez przemieszczenia.

Równania równowagi mają postać

$$\sigma_{ij,j} = 0. \quad (1)$$

Związki fizyczne dla sprężystego materiału krzepnącego odlewu są [9]

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} - \gamma \delta_{ij} \Theta + \delta_{ij} p \Big|_{\Psi(x_i)}, \quad (2)$$

gdzie

$\mu, \lambda$  - stałe Lamego,

$\alpha$  - współczynnik rozszerzalności cieplnej materiału krzepnącego odlewu,

$T_{kr.}$  - temperatura krzepnięcia odlewu,

$T(x_i, t)$  - pole temperatur odlewu,

$\gamma = \alpha(2\mu + 3\lambda)$ ,

$\delta_{ij}$  - delta Kroneckera,

$\Theta = \Theta(x_i, t) = T(x_i, t) - T_{kr.}$

$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(x_i, t)$  - tensor odkształcenia fazy stałej,

$\Psi(x_i)$  - czas, w którym punkt materialny  $x_i$  przechodzi z fazy ciekłej do stałej,

$\delta_{ij} p(x_i, t)$  - izotropowy tensor naprężenia fazy ciekłej, przy czym tensor ten dla czasu  $t = \Psi(x_i)$  oznaczono przez  $\delta_{ij} p \Big|_{\Psi(x_i)}$

Podstawiając (2) do (1) otrzymuje się

$$\delta_{ij,j} = 2\mu \varepsilon_{ij,j} + \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk,j} - \gamma \delta_{ij} \Theta_{,j} + \delta_{ij} p \Big|_{\Psi(x_i),j} = 0. \quad (3)$$

Związki pomiędzy odkształceniami i przemieszczeniami są następujące [9]:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} - u_{1,j} \Big|_{\Psi(x_i)} - u_{j,1} \Big|_{\Psi(x_i)}) \quad (4)$$

lub w innej postaci

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} + \dot{u}_i \Big|_{\Psi(x_i),j} + \dot{u}_j \Big|_{\Psi(x_i),i}). \quad (4a)$$

Uwzględniając związki (4) w równaniach (3) mamy

$$\begin{aligned} & \mu(u_{i,jj} + (\lambda + \mu)u_{j,ij} - \mu u_{i,jj}|_{\Psi(x_i)} - (\lambda + \mu)u_{i,ij}|_{\Psi(x_i)} - \\ & - \mu(\dot{u}_{i,j}|_{\Psi(x_i)} + \dot{u}_{j,i}|_{\Psi(x_i)})\Psi_{,j} - \lambda\dot{u}_{j,j}|_{\Psi(x_i)}\Psi_{,i} - \\ & - \gamma\delta_{ij}\dot{\Theta}_{,j} + \delta_{ij}\dot{p}|_{\Psi(x_i)}\Psi_{,j} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Warunki brzegowe na powierzchni krzepnięcia, określone odpowiednio w prędkościach przemieszczenia i naprężenia, wynoszą

$$\begin{aligned} & \mu(\dot{u}_{i,j}|_{\Psi(x_i)} + \dot{u}_{j,i}|_{\Psi(x_i)})N_j + \lambda\dot{u}_{j,j}|_{\Psi(x_i)}N_i + \\ & - \gamma_{ij}\dot{\Theta}|_{\Psi(x_i)}N_j - \delta_{ij}\dot{p}|_{\Psi(x_i)}N_j = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

$$(\dot{\sigma}_{ij}|_{\Psi(x_i)} - \delta_{ij}\dot{p}|_{\Psi(x_i)})N_j = 0. \quad (7)$$

## 2. Zagadnienie krzepnięcia odlewu lepkosprężystego

Równania na przemieszczenia krzepnącego odlewu lepkosprężystego otrzymuje się analogicznie jak dla odlewu sprężystego. Obowiązują także, sformułowane w poprzednim punkcie, równania równowagi (1) oraz różniczkowe związki (4), wiążące odkształcenia z przemieszczeniami.

Równania konstytutywne dla krzepnącego odlewu lepkosprężystego mają postać [8]

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(x_i, t) = & \int_{\Psi(x_i)}^t \Phi_1(t - \tau) \dot{\epsilon}_{ij}(x_i, \tau) d\tau + \frac{1}{3}\delta_{ij} \int_{\Psi(x_i)}^t (\Phi_2(t - \tau) - \\ & - \Phi_1(t - \tau)) \dot{\epsilon}_{kk}(x_i, \tau) d\tau - \alpha\delta_{ij} \int_{\Psi(x_i)}^t \Phi_2(t - \tau) \dot{\Theta}(x_i, \tau) d\tau + \delta_{ij} p|_{\Psi(x_i)}, \end{aligned} \quad (8)$$

gdzie  $\Phi_1$  i  $\Phi_2$  są funkcjami relaksacji.

Równania przemieszczeniowe uzyskuje się analogicznie jak dla odlewu sprężystego. Mają one postać

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2}\Psi_{,j}\Phi_1(t-\Psi(x_i))(\dot{u}_{i,j}|_{\Psi(x_i)} + \dot{u}_{j,i}|_{\Psi(x_i)}) + \frac{1}{2}\int_{\Psi(x_i)}^t \Phi_1(t-\tau)(\dot{u}_{i,jj} + \\
 & + \dot{u}_{j,ij})d\tau - \frac{1}{3}\Psi_{,j}\delta_{ij}(\Phi_2(t-\Psi(x_i)) - \Phi_1(t-\Psi(x_i)))\dot{u}_{j,j}|_{\Psi(x_i)} + \\
 & + \frac{1}{3}\delta_{ij}\int_{\Psi(x_i)}^t (\Phi_2(t-\tau) - \Phi_1(t-\tau))\dot{u}_{j,j}d\tau - \alpha\delta_{ij}\Psi_{,j}\Phi_2(t-\Psi(x_i))\dot{\theta}|_{\Psi(x_i)} - \\
 & - \alpha\delta_{ij}\int_{\Psi(x_i)}^t \Phi_2(t-\tau)\dot{\theta}_{,j}(x_i,\tau)d\tau + \delta_{ij}\dot{p}|_{\Psi(x_i)}\Psi_{,j} = 0. \quad (9)
 \end{aligned}$$

Dla czasu  $t = \Psi(x_i)$  z równań (9) otrzymuje się

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2}\Phi_1(0)(\dot{u}_{i,j}|_{\Psi(x_i)} + \dot{u}_{j,i}|_{\Psi(x_i)})N_j + \frac{1}{3}(\Phi_2(0) - \Phi_1(0))\dot{u}_{j,j}|_{\Psi(x_i)}N_i - \\
 & - \alpha\delta_{ij}\Phi_2(0)\dot{\theta}|_{\Psi(x_i)}N_j - \delta_{ij}\dot{p}|_{\Psi(x_i)}N_j = 0. \quad (10)
 \end{aligned}$$

Są to warunki brzegowe na powierzchni krzepnięcia, wyrażone w prędkościach przemieszczenia. Warunki brzegowe w prędkościach naprężenia otrzymuje się z równań (10), różniczkując uprzednio związki (8) względem czasu. Wówczas jest

$$\begin{aligned}
 \dot{\sigma}_{ij}(x_i, t) & = \Phi_1(0)\dot{\epsilon}_{ij}(x_i, t) + \int_{\Psi(x_i)}^t \dot{\Phi}_1(t-\tau)\dot{\epsilon}_{ij}(x_i, \tau)d\tau + \\
 & + \frac{1}{3}\delta_{ij}(\Phi_2(0) - \Phi_1(0))\dot{\epsilon}_{kk}(x_i, t) + \frac{1}{3}\delta_{ij}\int_{\Psi(x_i)}^t (\dot{\Phi}_2(t-\tau) -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \dot{\Phi}_1(t - \tau) \dot{\epsilon}_{kk}(x_i, \tau) d\tau - \alpha \delta_{ij} \dot{\Phi}_2(0) \dot{\theta}(x_i, t) - \\
 & - \alpha \delta_{ij} \int_{\Psi(x_i)}^t \dot{\Phi}_2(t - \tau) \dot{\theta}(x_i, \tau) d\tau.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Dla czasu  $t = \Psi(x_i)$  otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 \dot{\sigma}_{ij} \Big|_{\Psi(x_i)} &= \dot{\Phi}_1(0) \dot{\epsilon}_{ij} \Big|_{\Psi(x_i)} + \frac{1}{3} \delta_{ij} (\dot{\Phi}_2(0) - \dot{\Phi}_1(0)) \dot{\epsilon}_{kk} \Big|_{\Psi(x_i)} - \\
 & - \alpha \delta_{ij} \dot{\Phi}_2(0) \dot{\theta} \Big|_{\Psi(x_i)}.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Wykorzystując w (10) zależności (12), i przekształconą dla  $t = \Psi(x_i)$  postać związków (4a), otrzymujemy warunki brzegowe wyrażone w prędkościach naprężenia

$$(\sigma_{ij} \Big|_{\Psi(x_i)} - \delta_{ij} \dot{p} \Big|_{\Psi(x_i)}) N_j = 0. \tag{13}$$

### 3. Analogia sprężysto-lepkosprężysta

Dokonując transformacji Laplace'a na równaniach przemieszczeniowych materiału lepkosprężystego uzyskuje się związki podobne formalnie do równań przemieszczeniowych materiału sprężystego. Różnica polega na tym, że w równaniach przemieszczeniowych teorii sprężystości wielkości  $\lambda$ ,  $\mu$  są stałymi, podczas gdy dla ciała lepkosprężystego są one funkcjami parametru  $s$ . Analogia ta nosi nazwę analogii sprężysto-lepkosprężystej [8]. Dokonując takiej transformacji Laplace'a [3, 5] na związkach (8) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} s \bar{\Phi}_1(s) (\bar{u}_{i,jj} + \bar{u}_{j,ij} - \bar{u}_{i,jj} \Big|_{\Psi(x_i)} - \bar{u}_{j,ij} \Big|_{\Psi(x_i)}) - \\
 & - \bar{u}_{i,j} \Big|_{\Psi(x_i)} \Big|_{\Psi,j} - \bar{u}_{j,i} \Big|_{\Psi(x_i)} \Big|_{\Psi,j} + \frac{1}{3} \delta_{ij} s (\bar{\Phi}_2(s) - \bar{\Phi}_1(s)) \cdot
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \cdot (\bar{u}_{j,ij} - \bar{u}_{j,ij}) \Big|_{\Psi(x_1)} - \bar{u}_{j,j} \Big|_{\Psi(x_1)} \Psi_{,j} - \alpha \delta_{ij} s \bar{\Phi}_2(s) \bar{\Theta}_{,j}(s) + \\
 & + \delta_{ij} \bar{p} \Big|_{\Psi(x_1)} \Psi_{,j} = 0. \tag{14}
 \end{aligned}$$

Wprowadzając oznaczenia

$$\begin{aligned}
 \bar{\mu}(s) &= \frac{1}{2} s \bar{\Phi}_1(s), \\
 \bar{\lambda}(s) &= \frac{1}{3} s (\bar{\Phi}_2(s) - \bar{\Phi}_1(s)), \\
 \bar{\gamma}(s) &= \alpha s \bar{\Phi}_2(s),
 \end{aligned}$$

otrzymuje się

$$\begin{aligned}
 & \bar{\mu}(s) (\bar{u}_{i,jj} + (\bar{\lambda}(s) + \bar{\mu}(s)) \bar{u}_{j,ij} - \bar{\mu}(s) \bar{u}_{i,jj}) \Big|_{\Psi(x_1)} - \\
 & - (\bar{\lambda}(s) + \bar{\mu}(s)) \bar{u}_{i,ij} \Big|_{\Psi(x_1)} - \bar{\mu}(s) (\bar{u}_{i,j} \Big|_{\Psi(x_1)} + \bar{u}_{j,i} \Big|_{\Psi(x_1)}) \Psi_{,j} - \\
 & - \bar{\lambda}(s) \bar{u}_{j,j} \Big|_{\Psi(x_1)} \Psi_{,i} - \bar{\gamma}(s) \delta_{ij} \bar{\Theta}_{,j}(s) + \delta_{ij} \bar{p} \Big|_{\Psi(x_1)} \Psi_{,j} = 0. \tag{15}
 \end{aligned}$$

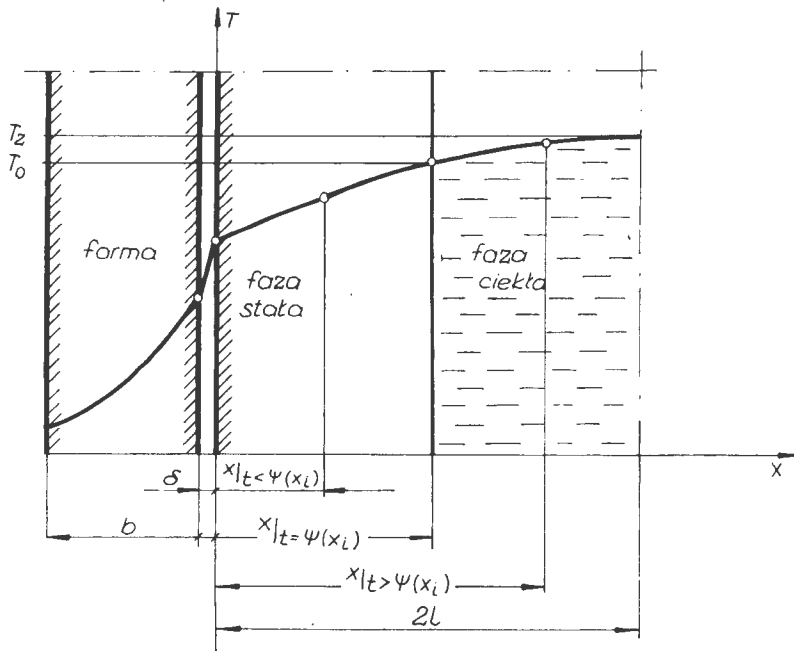
Równania (8) po dokonaniu transformacji Laplace'a mają postać analogiczną do równań (5) dla odlewu sprężystego. Warunki brzegowe na powierzchni krzepnięcia dla odlewu lepkosprężystego mają taką samą postać jak odpowiednie warunki (7) dla odlewu sprężystego.

#### 4. Krzepnięcie tarczy wykazującej cechy materiału lepkosprężystego

##### 4.1. Sformułowanie zagadnienia

Rozważmy krzepnięcie tarczy, która jest ograniczona płaską formą odlewniczą o grubości  $b$ . Grubość tarczy wynosi 2 l (rys. 1) [6].

W chwili początkowej temperatura tarczy jest jednakowa i równa temperaturze  $T_z$ . Zakładamy, że własności termofizyczne metalu w stanie ciekłym i zakrzepłym nie zależą od temperatury oraz zachowana jest płaska powierzchnia rozdziału faz. W rozważaniach pomija się również wpływ



Rys. 1. Model krzepnięcia odlewu tarczy

ciśnienia metalostatycznego fazy ciekłej. Równania różniczkowe opisujące proces krzepnięcia mają postać

- dla fazy stałej

$$a_s \frac{\partial^2 T_s}{\partial x^2} - \frac{\partial T_s}{\partial t} = 0,$$

- dla fazy ciekłej

(16)

$$a_l \frac{\partial^2 T_l}{\partial x^2} - \frac{\partial T_l}{\partial t} = 0,$$

gdzie

$a_s, a_l$  - współczynniki przewodzenia temperatury fazy stałej i ciekłej,  
 $T_s, T_l$  - pola temperatur fazy stałej i ciekłej.

Równania te uzupełniamy warunkami zgodności na froncie krzepnięcia

$$\lambda_s \frac{\partial T_s}{\partial x} \Big|_{x=\xi} - \lambda_l \frac{\partial T_l}{\partial x} \Big|_{x=\xi} = L \rho_s \frac{d\xi}{dt}, \quad (17)$$

$$T_s \Big|_{x=\xi} = T_l \Big|_{x=\xi}, \quad (18)$$

gdzie

$\lambda_s$  - współczynnik przewodzenia ciepła fazy stałej,

$\lambda_l$  - współczynnik przewodzenia ciepła fazy ciekłej,

$\rho_s$  - gęstość fazy stałej,

$L$  - ciepło krzepnięcia.

Warunek brzegowy na zewnętrznej powierzchni formy ma postać

$$\alpha (T_{\text{pow.}} - T_{\text{ot.}}) = \lambda_f \frac{\partial T_f}{\partial x} \Big|_{|x|=b}, \quad (19)$$

gdzie

$\alpha = \alpha(T_{\text{pow.}})$  - współczynnik wnikania ciepła z formy do otoczenia,

$T_f$  - pole temperatur formy,

$T_{\text{pow.}}$  - temperatura zewnętrznej powierzchni formy,

$T_{\text{ot.}}$  - temperatura otoczenia,

$\lambda_f$  - współczynnik przewodzenia ciepła materiału formy.

Na powierzchni kontaktowej tarczy i formy mamy

$$\beta (T_f \Big|_{|x|=\delta} - T_s \Big|_{x=0}) = \lambda_f \frac{\partial T_f}{\partial x} \Big|_{|x|=\delta} = \lambda_s \frac{\partial T_s}{\partial x} \Big|_{x=0}, \quad (20)$$

gdzie

$\delta$  - grubość szczeliny skurczowej,

$\beta$  - współczynnik wymiany ciepła w szczelinie.

Warunki początkowe wynoszą

$$T_f \Big|_{t=0} = T_p, \quad (21)$$

$$T_l \Big|_{t=0} = T_z.$$

Sformułowane zadanie rozwiązuje się metodą różnic skończonych [4].

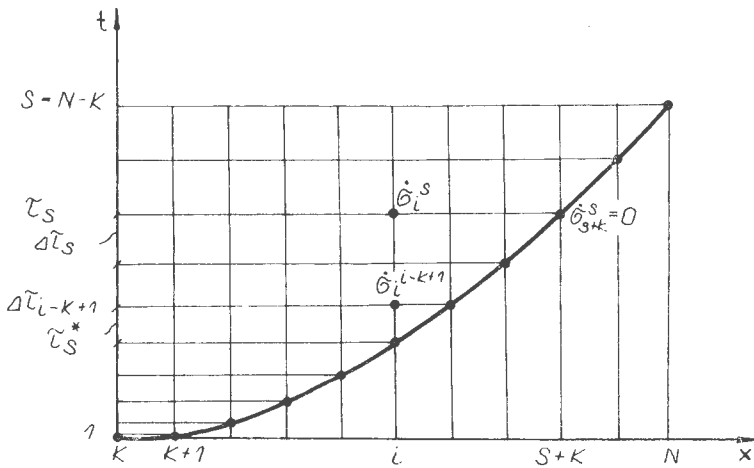


Prędkość zmiany naprężeń w zakrzepłej części określamy wzorem [11]

$$\dot{\sigma}(x, t) = \frac{E\alpha_T}{1-\nu} \left( \frac{1}{\xi} \int_0^{\xi} \dot{T}_s(x, t) dx - \dot{T}_s(x, t) \right), \quad (22)$$

gdzie  $\alpha_T$  jest współczynnikiem liniowej rozszerzalności cieplnej.

Naprężenia te w przyjętych do obliczeń węzłach siatki są równe (rys. 2).



Rys. 2. Schemat obliczeniowy naprężeń w zakrzepłej części odlewu

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}(i, s) = & \frac{E\alpha_T}{1-\nu} \left( \frac{1}{s-1} \left( \frac{1}{2} (T_k^s - T_k^{s-1}) + T_{s+k-i}^s - T_{s+k-1}^{s-1} \right) + \right. \\ & \left. + \sum_{r=k+1}^{r=s+k-2} (T_r^s - T_r^{s-1}) - (T_i^s - T_i^{s-1}) \right), \end{aligned} \quad (23)$$

$$i = k, \dots, s+k-2,$$

$$s = 1, 2, \dots, N-K.$$

Całkowite naprężenia podczas krzepnięcia określone są związkiem

$$\sigma(x, t) = \int_{t^*}^t \dot{\sigma}(x, \tau) d\tau, \quad (24)$$

co daje

$$\sigma(i, s) = \frac{1}{2}(\dot{\sigma}_i^{i-k+1} \Delta \tau_{i-k+1} + \sigma_i^s \Delta \tau_s) + \sum_{r=i-k+2}^{r=s-1} \dot{\sigma}_i^r \Delta \tau_r,$$

$$i = k+s-1; \quad \sigma(i, s) = \frac{1}{2} \dot{\sigma}_i^{s+k-1} \Delta \tau_s, \quad (25)$$

#### 4.2. Rozwiązanie zagadnienia lepkosprężystego

W dalszych rozważaniach przyjmujemy, że materiał krzepnący spełnia właściwości ciała lepkosprężystego. Korzystając z analogii sprężysto-lepkosprężystej ustalamy związki zachodzące między składowymi stanu naprężenia dla odlewu sprężystego i lepkosprężystego.

Dla sprężystego materiału odlewu naprężenia określone są następująco:

$$\sigma^s(t) = \frac{\alpha_T E}{1 - \nu} \sigma(t). \quad (26)$$

Dla lepkosprężystego materiału odlewu związek ten ma postać

$$\sigma^L(s) = \frac{\alpha_T \bar{E}(s)}{1 - \nu} \bar{\sigma}(s). \quad (27)$$

Przebieg funkcji  $\sigma = \sigma(t)$  aproksymujemy łamaną  $K$  o wierzchołkach  $(t_i, \sigma_i)$

$$K: \sigma(t) = \sum_{i=0}^{N-1} (m_i(t - t_i) + \sigma_i) [H(t - t_i) - H(t - t_{i+1})], \quad (28)$$

gdzie

$$m_i = \frac{\sigma_{i+1} - \sigma_i}{t_{i+1} - t_i}$$

$H(\cdot)$  - funkcja Heaviside'a,

$$H(t - a) = \begin{cases} 1, & t \geq a, \\ 0, & t < a, \end{cases}$$

Przyjmujemy, że materiał krzepnącego odlewu odpowiada modelowi Maxwella [8, 10]. Wówczas mamy

$$E(s) = \frac{3sC}{(2AC + 1)s + 2CB}$$

$$A = \frac{1}{\mu_0}; \quad B = \frac{1}{\eta}; \quad C = 3K = 3\lambda_0 + 2\mu_0,$$

$\mu_0, \lambda_0$  - stałe Lamego,

$\eta$  - współczynnik lepkości.

W celu określenia wartości naprężeń w lepkosprężystej tarczy należy wykonać odwrotną transformację Laplace'a [1]

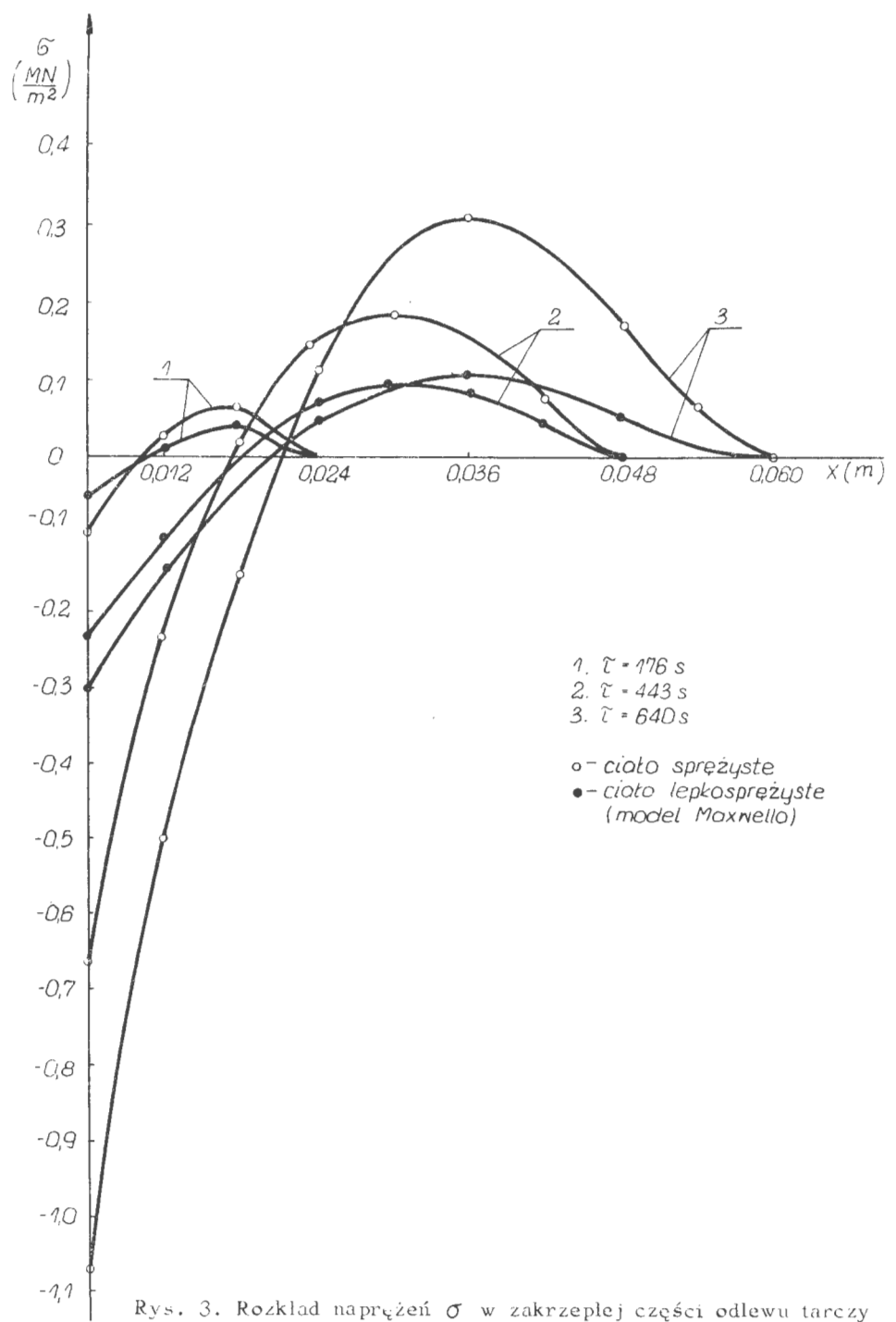
$$\sigma^L(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\bar{\sigma}^L(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \bar{\sigma}^L(s) e^{-s\tau} ds.$$

Zatem naprężenia  $\sigma^L(t)$  są równe

$$\begin{aligned} \sigma_i^L(t) = & 3\alpha_T C \left( \sum_{i=k}^{N-1} \left\{ \left( \left( \frac{\sigma_i}{2AC + 1} - \frac{m_i}{2CB} e^{-\frac{2CB}{2AC+1}(t-t_i)} + \right. \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \frac{m_i}{2CB} \right) H(t - t_i) - \left( \left( \frac{1}{2AC + 1} (m_i(t_{i+1} - t_i) + \sigma_i) - \right. \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - \frac{m_i}{2CB} \right) e^{-\frac{2CB}{2AC+1}(t-t_{i+1})} + \frac{m_i}{2CB} \right) H(t - t_{i+1}) \right\} \right). \quad (29) \end{aligned}$$

## 5. Obliczenia

Obliczenia numeryczne przeprowadzono dla odlewu tarczy o grubości  $l = 0,06$  m wykonanego z materiału Zn-Al. Parametry termofizyczne dla



Rys. 3. Rozkład naprężeń  $\sigma$  w zakreplej części odlewu tarczy

materiału odlewu i kokili ustalono na podstawie danych zawartych w pracy [2]. Wielkości te podano w tab. 1.

Tabela 1

	$\lambda$ ( $\frac{W}{mK}$ )	$a$ ( $\frac{m^2}{s}$ )	$L$ ( $\frac{J}{kg}$ )	$\rho$ ( $\frac{kg}{m^3}$ )	$C$ ( $\frac{J}{kgK}$ )	$E$ ( $\frac{MN}{m^2}$ )	$\alpha$ ( $\frac{1}{K}$ )
odlew - faza stała	113	$3,81 \times 10^{-5}$	$111 \times 10^3$	7099	418	$4,5 \times 10^3$	$3,2 \times 10^{-5}$
odlew faza ciekła	57	$1,73 \times 10^{-5}$	-	6792	480	-	-
materiał kokili	54	$1,4 \times 10^{-5}$	-	7800	510	$2 \times 10^5$	$1,55 \times 10^{-5}$

Współczynnik wymiany ciepła w szczelinie  $\beta = 460 \frac{W}{m^2}$ . Rezultaty obliczeń dotyczące zmian naprężeń w odlewie sprężystym i lepko sprężystym dla czasu 176 s, 443 s, 640 s od chwili zalania formy ciekłym metalem przedstawiono na rys. 3. Wyniki obliczeń wskazują na wyraźny udział pełzania metali w wielkościach naprężeń. Widać to z porównania stanu naprężenia krzepnącej tarczy będącej ciałem Maxwella i Hooke'a. Analiza innych modeli reologicznych odlewanych stopów metali ujmujących istotne cechy pełzania w temperaturach krzepnięcia wydaje się szczególnie ważna, co podkreślono w niektórych pracach z zakresu odlewnictwa [2, 12].

#### Literatura

1. J. Antonowicz, Tablice funkcji dla inżynierów, PWN Warszawa 1980.
2. G.F. Balandin, Osnovy teorii formirovanija otlivki, Moskva 1976.
3. D. Bobrowski, Z. Ratajczak, Przekształcenia Laplace'a i jego zastosowania, Politechnika Poznańska 1975.
4. L. Collatz, Metody numeryczne rozwiązywania równań różniczkowych, PWN, Warszawa 1960.

5. Doetsch, Praktyka przekształcenia Laplace'a, Warszawa 1964.
6. E.A. Jodko, Metod analitického rasczeta zatwierdewanija tiel prostiejszej formy, Inżenierno Fiziczeskij Žurnal, 6, 7.
7. E.A. Leonowa, Miechaniczeskije swojstwa mietallow w okrestnosti tiempieratury kristalizacii, Sb. Uprugost' i neuprugost', Wyp. 1, Moskwa 1971.
8. W. Nowacki, Teoria pelzania, Arkady, Warszawa 1963.
9. R. Parkitny, Naprężenia w odlewach. Stadium krzepnięcia, Praca habilitacyjna, ZN Politechnika Częstochowska Nr 15, Częstochowa 1977.
10. F.J. Rizzo, P.J. Shippy, An application of the correspondence principle of linear viscoelasticitytheory, SIAM, J. Appl. Math. 21, 2 (1971).
11. W. Sakwa, R. Parkitny, Residual stresses in castings due to cooling, Giesserei-Forschung, 33, (1981) 55-60.
12. W. Sakwa, Podstawowe zagadnienia naprężeń w odlewach, Krzepnięcie Metali i Stopów, 4 (1981).