

Zygmunt Jasikowski  
Ryszard Parkitny

## ANALIZA ODDZIAŁYWAŃ MECHANICZNYCH WLEWNICY I WLEWKA METODĄ NOŚNOŚCI GRANICZNEJ

W rozważaniach dotyczących zagadnień krzepnięcia i stygnięcia wlew-  
ków dużą rolę przypisać należy analizie transportu ciepła na powierzchni  
styku wlewka i wlewnicy. W początkowym stadium krzepnięcia ciepło od  
wlewka do wlewnicy jest przekazywane przez pokrycie izolacyjne. W tym  
stadium pokrycie ze względu na zachodzące w nim reakcje chemiczne  
zmienia skład, których produktami są również substancje gazowe. Zmie-  
nia się wynikowy współczynnik przewodności cieplnej pokrycia. Zapoczą-  
tkowane są także procesy skurczowe, związane ze spadkiem temperatur  
wlewka i nagrzewaniem się wlewnicy. W narożach wlewka tworzy się już  
szczelina skurczowa. W dalszym stadium krzepnięcia między wlewkiem i  
wlewnicą rozwija się w pełni szczelina skurczowa, nierównomierna po  
obwodzie i wysokości wlewka. Ze względu na niejednakową zmianę współ-  
czynnika przewodności cieplnej szczeliny spowalnia się w różny sposób,  
w różnych punktach wlewka, proces krzepnięcia i stygnięcia. Obszary  
wlewka, w których szczelina skurczowa pojawiła się wcześniej, krzepną  
wolniej. Obszary pozostające w pełnym kontakcie krzepną szybciej.

Analizie szczeliny skurczowej poświęcone są liczne badania doświad-  
czalne [1, 4-9, 12, 13, 15, 22-24], jak również prace teoretyczne [2,  
3, 6, 10, 14, 17-19, 21, 23]. Prowadzone są one w dwóch kierunkach.  
Pierwszy dotyczy analizy zjawisk ciepłno-chemicznych w obszarze styku  
wlewka i wlewnicy, drugi zaś analizuje zjawiska ciepłno-mechaniczne o

różnym stopniu uproszczenia. Często ustala się tylko globalny czas "odejścia" wlewka od wlewnicy.

Modele powstawania szczeliny skurczowej buduje się odrębnie dla wlewków okrągłych i wielościennych na ogół kwadratowych i prostokątnych. Ścisłą analizę tego zagadnienia dla wlewków okrągłych przedstawiono w pracach [2, 3]. Uwzględniono tu wszystkie przemieszczenia wlewka i wlewnicy, tzn. pochodzące od pola temperatur i ciśnienia metalostatycznego, a także od zmiennego oddziaływania występującego między wlewkiem a wlewnicą.

W wielu pracach zakrzepłą warstwę wlewka traktuje się jako belkę o różnym zamocowaniu [10, 14, 21].

W pracy [11] rozważa się zagadnienie szczeliny skurczowej we wlewku o przekroju wielokąta foremego dla sprzężonych warunków ciągłości na powierzchni styku wlewka i wlewnicy. Określono w niej oddziaływania, przemieszczenia i naprężenia wlewka i wlewnicy. Takie podejście zapoczątkowano w pracach [17-19].

Uzyskane rezultaty badań doświadczalnych potwierdzają fakt, że szczelina skurczowa tworzy się niejednocześnie na powierzchni styku wlewka i wlewnicy; tworzy się od naroża do środka wlewka oraz od dołu ku górze. Uwzględniając ten fakt w niniejszym opracowaniu zaproponowano na podstawie metody nośności granicznej płyt dwuwymiarowy model tworzenia się szczeliny. Pozwala on, w odróżnieniu od spotykanych w literaturze modeli jednowymiarowych (tworzenie się szczeliny ujęte jest wyłącznie dla przekroju poprzecznego lub podłużnego wlewka), określić obszar kontaktu wlewka i wlewnicy, jak również uchwycić globalny czas "odejścia" wlewka od wlewnicy.

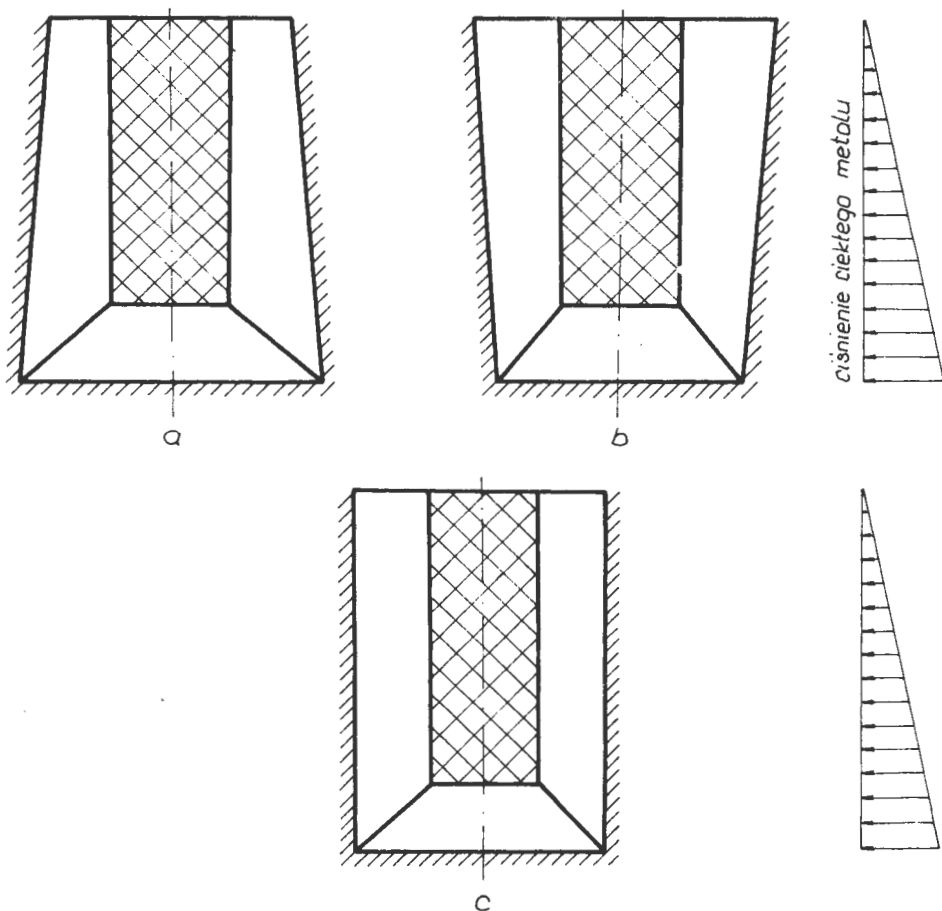
### 1. Schemat statyczny układu

Z układu wlewek - forma odlewnicza wyodrębniono ścianę boczną wlewka, stanowiącą płytę poddaną działaniu ciśnienia metalostatycznego (rys. 1). Wymiary i własności fizyczne zakrzepłej płyty przyjęto jako stałe. Własności fizyczne uzależniono wyłącznie od temperatury zmiennej po grubości wlewka.

Rys. 1. Schemat statyczny wlewka

Wyodrębniona płyta jest utwierdzona w narożach. Brzeg górny jest swobodny (por. rys. 1). Układ poddany jest działaniu obciążenia pochodzącego od ciśnienia metalostatycznego.

Proponowane rozwiązanie zagadnienia jest rozwiązaniem przybliżonym, opartym na teorii linii załomów przy wykorzystaniu metody równowagi płytów, na jakie dzieli się płyta w granicznym stanie pracy. Metoda ta daje górne oszacowanie nośności granicznej [16]. Rozważa się trzy przypadki pracy zakrzepłego wlewka, uwzględniając stosowane zbież-



ności wlewnicy. Powierzchnia zakreskowana podwójnie na rys. 1 jest powierzchnią chwilowego kontaktu wlewka z wlewnicą. Od naroża i dolnego brzegu do linii załomu wyznaczającej obszar kontaktu wlewka z wlewnicą następuje oderwanie się wlewka od wlewnicy (powstaje szczelina skurczowa). Moment "odejścia" wlewka od wlewnicy określa czas, przy którym powierzchnia kontaktu wlewka z wlewnicą jest równa zero.

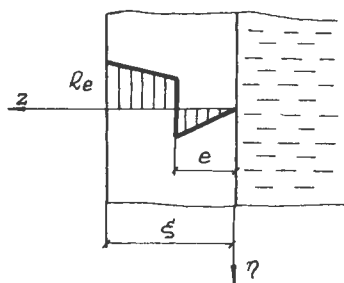
Celem określenia nośności granicznej krzepnącego naskórka wlewka metodą równowagi płyt konieczna jest znajomość jednostkowego momentu plastycznego.

Zakładamy, że granica plastyczności zmienia się liniowo po grubości krzepnącego naskórka według zależności

$$Re(z) = Re \frac{z}{\xi}, \quad (1)$$

gdzie  $\xi$  jest grubością zakrzepłej warstwy wlewka.

Granice plastyczności  $Re$  w przekroju poprzecznym wlewka uzależniamy od temperatury powierzchni wlewka  $t$  według zależności [20]



Rys. 2. Rozkład granicy plastyczności po grubości krzepnącego naskórka

$$Re = c(t_{kr.} - t) \quad (2)$$

gdzie  $t_{kr.}$  jest temperaturą krzepnięcia, a współczynnik  $c$  przyjęto zgodnie z [20] dla stali węglowej równy  $5,45 \text{ N/cm}^2\text{K}$ .

Położenie osi obojętnej  $e$ , przy założeniu jednakowych granic plastyczności przy rozciąganiu i ściskaniu, określono z warunku równowagi sił działających na jednostkę długości przekroju (rys. 2)

$$\int_0^e Re(z) dz = \int_e^{\xi} Re(z) dz. \quad (3)$$

Podstawiając do równania (3) rozkład granicy plastyczności dany funkcją (1), otrzymujemy położenie osi obojętnej

$$e = \frac{\xi}{\sqrt{2}}. \quad (4)$$

Jednostkowy moment plastyczny równy jest

$$m = \int_e^{\xi} \operatorname{Re}(z) (z - e) dz + \int_0^e \operatorname{Re}(z) (e - z) dz. \quad (5)$$

Wstawiając do równania (5) zależność (1) i wykonując całkowanie, mamy

$$m = 0,097 \operatorname{Re} \xi^2. \quad (6)$$

Momenty obciążenia zewnętrznego od ciśnienia metalostatycznego dla płatu (1) względem krawędzi BC oraz płatu (2) względem krawędzi AB wynoszą (np. 3)

$$M_1 = \frac{qx^2}{12a} ((2a - x)b + (4a - 3x)y),$$

$$M_2 = \frac{q}{2a} \left( \operatorname{tg} \gamma - \frac{b-y}{2x} \right)^2 \left( \frac{1}{3} ax^3 - \frac{1}{4} x^4 \right) + \frac{q}{48a} (a-x)^2 (3(b-y)^2 - 4(b-y)(a+2x) \operatorname{tg} \gamma + 2(a^2 + 2ax + 3x^2) \operatorname{tg}^2 \gamma). \quad (7)$$

Płat (3) stanowi powierzchnię kontaktu ściany wlewka z wlewnicą. Momenty obciążenia zewnętrznego dla płyt (1) i (2) muszą równoważyć się z momentami plastycznymi wzdłuż linii załomów. Otrzymujemy zatem

$$M_1 = 2mb, \quad (8)$$

$$M_2 = 2ma.$$

Porównując zależności (7) i (8) otrzymujemy

$$2mb = \frac{qx^2}{12a} ((2a - x)b + (4a - 3x)y), \quad (9)$$

$$\begin{aligned}
 2ma = & \frac{q}{2a} \left( \operatorname{tg} \gamma - \frac{b-y}{2x} \right)^2 \left( \frac{1}{3} ax^3 - \frac{1}{2} x^4 \right) + \\
 & + \frac{q}{48a} (a-x)^2 (3(b-y))^2 - 4(b-y)(a+2x) \operatorname{tg} \gamma + \\
 & + 2(a^2 + 2ax + 3x^2) \operatorname{tg}^2 \gamma. \quad (10)
 \end{aligned}$$

Wyznaczając z równania (9) parametr  $y$  mamy

$$y = \frac{24mab - qx^2(2a-x)b}{qx^2(4a-3x)}. \quad (11)$$

Wstawiając równanie (11) do zależności (10) dostajemy równanie na poszukiwaną wielkość  $x$  w postaci

$$\begin{aligned}
 m^2 a^2 b^2 (864a^2 + 432x^2 - 1152ax) + mqa(-432ax^6 + \\
 + 144b^2 x^5 + 1152a^2 x^5 - 600ab^2 x^4 - 768a^3 x^4 + 864a^2 b^2 x^3 - \\
 - 432a^3 b^2 x^2 + 12bx^2(5ax^2 - 4x^3 + a^3) \operatorname{tg} \gamma) + \\
 + q^2 b^2 (54a^4 x^4 - 144a^3 x^5 + 147a^2 x^6 - 68ax^7 + 12x^8) - \\
 - q^2 b (66a^3 x^6 - 133a^2 x^7 + 98ax^8 - 24x^9 + 12a^5 x^4 - \\
 - 17a^4 x^5) \operatorname{tg} \gamma + q^2 (16a^6 x^4 - 24a^5 x^5 + 9a^4 x^6) \operatorname{tg}^2 \gamma = 0. \quad (12)
 \end{aligned}$$

Jednostkowy moment zginający  $m$  w równaniu (12) określony jest wzorem (6).

Przy współdziałaniu wlewka i wlewnicy zgodnie z rysunkiem 1b przyjmujemy w równaniu (12)  $\gamma < 0$  oraz  $\gamma = 0$  dla schematu z rysunku 1c.

## 2. Pole temperatur wlewka

Określenie pola temperatur wlewka i wlewnicy jest związane z rozwiązaniem równań przewodnictwa ciepła. Ścisłe rozwiązanie rozważonego

przypadku jest niemożliwe. Najczęściej poszukuje się przybliżonych rozwiązań numerycznych. Inne rozwiązania przybliżone postępują postacią pola temperatur określona przy pewnych parametrach wyznaczonych z równań różniczkowych przewodnictwa ciepła względnie z równań ogólnych bilansu ciepła.

Pole temperatur zakrzepłej części wlewka przyjmujemy w postaci

$$t_1 = t_{kr.} - \frac{t_{kr.} - t_{1p}}{\xi} z. \quad (13)$$

Analogicznie określamy pole temperatur ścianki wlewnicy

$$t_2 = t_{2p} - \frac{t_{2p} - t_{3p}}{g} z \quad (14)$$

gdzie

$t_{kr.}$  - temperatura krzepnięcia,

$t_{1p}$  - temperatura powierzchni zewnętrznej wlewka,

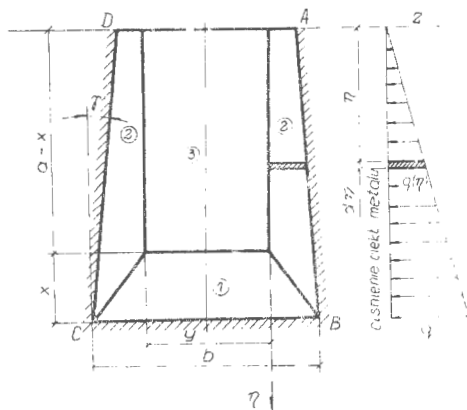
$t_{2p}$  - temperatura powierzchni wewnętrznej wlewnicy,

$t_{3p}$  - temperatura powierzchni zewnętrznej wlewnicy,

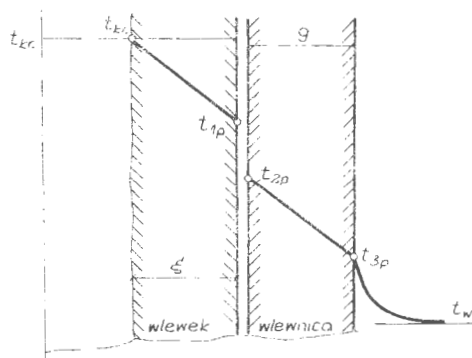
$g$  - grubość ścianki wlewnicy,

$t_w$  - temperatura otoczenia.

Wielkościami poszukiwanymi są temperatury powierzchni wlewka  $t_{1p}$  i wlewnicy  $t_{2p}$  i  $t_{3p}$  oraz grubość zakrzepłej warstwy  $\xi$ .



Rys. 3. Schemat tworzenia się szczeliny na bocznej ścianie wlewka



Rys. 4. Schemat ilustrujący krzepnięcie wlewka we wlewnicy

Dla rozważanego układu rozpisujemy ogólny bilans ciepła w przedziale czasu  $d\tau$ .

$$dQ_1 = -\lambda_1 \frac{dt_1}{dz} \Big|_{z=\xi} F d\tau \quad (15)$$

gdzie

$F$  - pole powierzchni wlewka,

$\lambda_1$  - współczynnik przewodzenia ciepła metalu wlewka.

Różniczkując zależność (13) otrzymujemy

$$\frac{dt_1}{dz} \Big|_{z=\xi} = - \frac{t_{kr.} - t_{lp}}{\xi} . \quad (16)$$

Podstawiając zależność (16) do (15) uzyskujemy

$$dQ_1 = \lambda_1 \frac{t_{kr.} - t_{lp}}{\xi} F d\tau . \quad (17)$$

Analogicznie możemy określić elementarne ciepło  $dQ_2$  przejmowane przez ścianki wlewnicy

$$dQ_2 = \lambda_2 \frac{t_{2p} - t_{3p}}{g} F d\tau \quad (18)$$

oraz ciepło przejmowane ze ścianek wlewnicy przez otoczenie

$$dQ_3 = \alpha (t_{3p} - t_w) F d\tau \quad (19)$$

gdzie

$\lambda_2$  - współczynnik przewodzenia ciepła metalu wlewnicy,

$\alpha$  - współczynnik wymiany ciepła pomiędzy ścianką wlewnicy a otoczeniem.

Ciepło akumulacji  $Q_{ak.}$ , wydzielające się na skutek obniżania się temperatury  $t_1$  zakrzepłej warstwy wlewka, określone jest wzorem

$$Q_{ak.} = F c_{l1} \rho_l \int_0^{\xi} (t_{kr.} - t_1) dz . \quad (20)$$



Uwzględniając we wzorze (20) przyjętą postać pola temperatur wlewka, określonego wzorem (13), otrzymujemy

$$Q_{ak.} = \frac{F c_l \varrho_l}{2} (t_{kr.} - t_{lp}) \xi \quad (21)$$

gdzie

$\varrho_l$  - gęstość materiału wlewka,

$c_l$  - ciepło właściwe materiału wlewka.

Różniczkując związek (21) otrzymujemy

$$dQ_{ak.} = \frac{F c_l \varrho_l}{2} \left( (t_{kr.} - t_{lp}) d\xi - \frac{dt_{lp}}{d\xi} \xi \right). \quad (22)$$

Ciepło krzepnięcia  $dQ_{kr.}$  wydzielające się w wyniku zakrzepnięcia a warstwy  $d\xi$  wlewka jest określone następująco

$$dQ_{kr.} = F \varrho_l L_1 d\xi, \quad (23)$$

gdzie  $L_1$  jest ciepłem krzepnięcia materiału wlewka.

Elementarna ilość ciepła  $dQ_l$  oddawana przez wlewek, określona zależnością (17), równa jest zgodnie sumie ciepła akumulacji  $dQ_{ak.}$  i ciepła krzepnięcia  $dQ_{kr.}$ . Po podstawieniu i przekształceniach tej równości otrzymujemy równanie różniczkowe krzepnięcia

$$a_l d\tau = \left( \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\frac{dt_{lp}}{d\xi} \xi}{t_{kr.} - t_{lp}} \right) + \frac{L_1}{c_l} \frac{1}{t_{kr.} - t_{lp}} \right) \xi d\xi, \quad (24)$$

gdzie

$$a_l = \frac{\lambda_l}{\varrho_l c_l}.$$

Ilość ciepła jaką przewodzi szczelina skurczowa jest równa

$$dQ_{szcz.} = \beta (t_{lp} - t_{2p}) F d\tau, \quad (25)$$

gdzie  $\beta$  - współczynnik wymiany ciepła w szczelinie.

Wobec faktu, że szczelina skurczowa nie akumuluje ciepła, mamy

$$dQ_1 = dQ_{\text{szcz.}} \quad (26)$$

Wstawiając do zależności (26) związki (17) i (25) otrzymujemy

$$t_{1p} - t_{2p} = \frac{\lambda_1}{\beta} \frac{t_{kr.} - t_{1p}}{\xi}. \quad (27)$$

Ponieważ układ jest układem zamkniętym, mamy

$$dQ_1 = dQ_2 \quad (28)$$

oraz

$$dQ_1 = dQ_3$$

Wstawiając do zależności (28) odpowiednie związki, dostajemy

$$t_{2p} - t_{3p} = \frac{\xi}{\xi} \frac{\lambda_1}{\lambda_2} (t_{kr.} - t_{1p}) \quad (29)$$

oraz

$$t_{3p} - t_w = \frac{\lambda_1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\xi} (t_{kr.} - t_{1p}). \quad (30)$$

Z zależności (27), (29) i (30) otrzymujemy

$$t_{1p} = t_{kr.} - \frac{\xi}{\xi + k_0} (t_{kr.} - t_w), \quad (31)$$

gdzie

$$k_0 = \frac{\lambda_1}{\beta} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} g + \frac{\lambda_1}{\alpha}.$$

Różniczkując zależność (31) mamy

$$\frac{dt_{1p}}{d\xi} = - \frac{k_o}{(\xi + k_o)^2} (t_{kr.} - t_w). \quad (32)$$

Wstawiając (31) i (32) do równania (24) otrzymujemy równanie różniczkowe krzepnięcia w postaci

$$a_1 d\tau = \left( \frac{1}{2} \left( \xi + \frac{\xi k_o}{\xi + k_o} \right) + \frac{L_1}{c_1} \frac{\xi + k_o}{t_{kr.} - t_w} \right) d\xi. \quad (33)$$

Całkując równanie (33) przy warunkach brzegowych dostajemy;

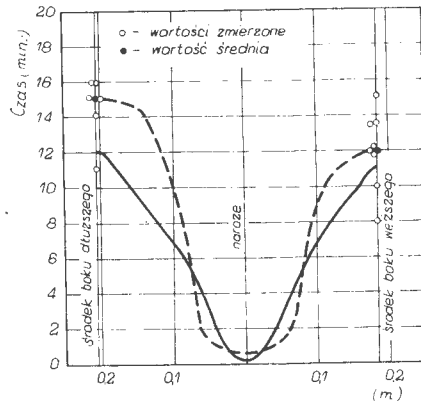
$$\tau = \frac{L_1}{2a_1} \left( \frac{1}{2} \xi^2 + k_o \xi - k_o^2 \ln \left( \frac{\xi}{k_o} + 1 \right) \right) + \frac{L_1}{c_1 a_1} \frac{\xi}{t_{kr.} - t_w} \left( \frac{\xi}{2} + k_o \right). \quad (34)$$

### 3. Wyniki obliczeń numerycznych

Obliczenia przeprowadzono dla wlewką o masie 1400 kg o rozmiarach 280 x 320 mm na górze, 320 x 410 mm na dole i wysokości 1750 mm rozważanego w pracy [4] A. Dienera, A. Drastika i W. Haumanna. Rozważany wlewek odpowiada schematowi z rys. 1a.

Wyniki obliczeń, według proponowanego podejścia, zobrazowano linią ciągłą na rys. 5. Linią przerywaną przedstawiono wyniki badań doświadczalnych [4]. Istniejące rozbieżności między proponowanym modelem a wynikami badań doświadczalnych tłumaczy fakt przyjęcia nazbyt uproszczonego pola temperatur przedstawionego w rozdziale 2.

Proponowany model matematyczny tworzenia się szczeliny



Rys. 5. Schemat tworzenia się szczeliny w czasie dla wlewką o masie 1400 kg

pomiędzy wlewkiem a wlewnicą potwierdził zbadany fakt, że na węższej ścianie wlewka czas "odejścia" wlewka od wlewnicy jest krótszy niż na ścianie o większych wymiarach. Za pomocą przedstawionego modelu można zatem obliczyć czas "odejścia" wlewka od wlewnicy, jak również prześledzić tworzenie się szczeliny na każdej wysokości wlewka, co wynika z założeń proponowanego modelu.

#### Literatura

1. G.A. Anisowicz, Zatwierdzenie otłiwok, Nauka i Technika, Mińsk 1979.
2. A. Bokota, J. Kidawa, R. Parkitny, L. Tomski, Naprężenia w odlewach w okresie ich krzepnięcia. Rozwiązania dla odlewów o kształtach regularnych, Krzepnięcie Metali i Stopów, 1, (1979).
3. A. Bokota, J. Kidawa-Kukła, R. Parkitny, L. Tomski, Naprężenia w odlewie i formie odlewniczej walca. Krzepnięcie Metali i Stopów, 2, (1981).
4. A. Diener, A. Drastik, W. Haumann, Untersuchungen über den Wärmestromübergang zwischen Block und Kokille beim Erstarren von Stahl, Archiv Eisenhüttenwesen, 43, Heft 7 (1972).
5. J. Gawroński, Rola powłoki i szczeliny gazowej w wymianie ciepła między odlewem a formą odlewniczą. Praca doktorska, Gliwice 1964.
6. G.P. Iwancow, K.J. Afanasjewa, G.S. Sjelkin, Teplotiechnika slitka i pieczej, Metallurgizdat., Moskwa 1953.
7. V.A. Jefimow, Kristallizacija i dieformacija narużnych sloew stalnych slitkow wo wriemija ich otłiwki, Woprosy Proizwodstwa Stali, wyp. 5 (1958).
8. V.A. Jefimow, Racionalnaja konfiguracija slitkow spokojnoj stali, Woprosy proizvodstwa stali, wyp. 5 (1956).
9. R.J. Jeśman, N.F. Zamkin, L.J. Szub, Rasczety processow litija. Wszejszaja Szkoła, Mińsk 1977.
10. W. Kapturkiewicz, Powstanie szczeliny w procesie wymiany ciepła pomiędzy wlewkiem a wlewnicą, Zeszyty Naukowe AGH. Zeszyt specjalny 29, Kraków 1972.

11. J. Kidawa-Kukla, Analiza oddziaływań mechanicznych wlewnicy i wlewnicy o przekroju wielokąta foremnego. Praca doktorska, Częstochowa 1983.
12. B. Matuschka, Heat equilibrium between ingot and ingot mold wall, *Archiv Eisenhüttenwesen*, 2 (1929).
13. F. Oeters, K. Sardemann, Untersuchungen zum zeitlichen Verlauf der Erstarrung in der Randzone erstarrenden Eisens, *Archiv Eisenhüttenwesen*, 45, 3 (1974).
14. F. Oeters, K. Sardemann, Mechanismus der Spaltbildung zwischen Block und Kokille bei Block und Strangguss, *Archiv Eisenhüttenwesen*, 45, 11 (1974).
15. F. Oeters, K. Rüttiger, H.J. Selenz, Warmellbergang beim Blockguss. Kommission der Europäischen Gemeinschaften Informationstagung, Giessen und Erstarren von Stahl, Luxemburg 1977.
16. W. Olszak, P. Perzyna, A. Sawczuk, Teoria plastyczności, PWN, Warszawa 1965.
17. R. Parkitny, Analiza oddziaływań mechanicznych odlewu i formy odlewniczej przy odlewaniu pod ciśnieniem. Materiały VI Krajowej Konferencji Odlewnictwa Ciśnieniowego, Częstochowa-Praszka 1976.
18. R. Parkitny, Naprężenia w ciałach narastających. Materiały XVIII Polskiej Konferencji Mechaniki Ciała Stałego, Wista-Jawornik 1976.
19. R. Parkitny, Naprężenia w odlewach. Stadium krzepnięcia. Praca habilitacyjna. Zeszyty Naukowe Politechniki Częstochowskiej, nr 15, Częstochowa 1977.
20. W.S. Ruties, W.I. Askoldow, Teorija nieprierywnoj razliwki, *Mietallurgija*, Moskwa 1971.
21. J. Savage, A theory of heat transfer and air gap formation in continuous casting moulds, *Journal of the Iron Steel*, 11 (1961).
22. A.J. Wejnik, Teorija zatwierdiewanija otliwki, Maszgis, Moskwa 1960.
23. A.J. Wejnik, Lit'e w kokil, *Maszinostrojenije*, Moskwa 1980.
24. A.J. Wejnik, Tieploobmen meźdu slitkom i izložnicej, *Mietallurgizdat*, Moskwa 1959.