

Adam Bokota  
Tadeusz Włodarczyk

## KRZEPNIĘCIE ODLEWU WALCA DRAŻONEGO WZMOCNIONEGO RURĄ WEWNĘTRZNĄ

Oznaczenia nie wyjaśnione w tekście:

- a - współczynnik przewodzenia temperatury ( $\frac{m^2}{s}$ ),
- c - ciepło właściwe (J/kg K),
- E - moduł Younga (MN/m<sup>2</sup>),
- L - ciepło krzepnięcia (kJ/kg),
- R - współczynnik oporu cieplnego (m<sup>2</sup>K/W),
- T<sub>z</sub> - temperatura zalewania (K),
- T<sub>k</sub> - temperatura krzepnięcia (K),
- W - prędkość krzepnięcia (m/s),
- α - liniowy współczynnik rozszerzalności cieplnej (1/K),
- α\* - współczynnik wymiany ciepła (W/m<sup>2</sup> K),
- β<sub>l</sub> - współczynnik wymiany ciepła między rurą, a odlewem (W/m<sup>2</sup>K),
- λ - współczynnik przewodzenia ciepła (W/m K),
- ν - współczynnik Poissona,
- ρ - gęstość (kg/m<sup>3</sup>),
- Ψ(o) - czas przejścia cząstki z fazy ciekłej do stałej (s).

### Wstęp

Nowoczesna, stale rozwijająca się technika stawia materiałom konstrukcyjnym coraz wyższe wymagania. Tradycyjne materiały często nie spełniają tych wymagań, mimo stosowania wielu zabiegów polepszających

ich własności mechaniczne. W ostatnich latach obserwuje się znaczny rozwój badań nad nową grupą materiałów, zwanych ogólnie kompozytami. Wykorzystuje się w nich prostą, znaną od dawna myśl umocnienia jednego materiału przez zbrojenie wykonane z innego materiału. Materiały takie otrzymuje się także przez odlewanie [4] i dlatego istotne jest poszukiwanie nowych technologii, które pozwolą otrzymywać odlewy elementów maszyn i urządzeń odporne np. na zużycie ścierne, wstrząsy termiczne i inne [11].

W literaturze odlewniczej szeroko opisany jest wpływ różnego rodzaju wtrąceń i dodatków mikroskopowych na umocnienie objętościowe bądź lokalne odlewu, natomiast mało jest pozycji wyjaśniających istotę makroskopowego zbrojenia odlewów [6, 8, 9], chociaż przy otrzymywaniu odlewów bimetalowych i zbrojonych makroskopowo występuje wiele zjawisk, które wymagają dokładniejszego zbadania i szerszej analizy. Należą do nich między innymi: rozkład temperatur przy krzepnięciu i stygnięciu, stan naprężenia, wzajemne oddziaływanie odlewu i zbrojenia, zjawisko dyfuzji i inne [3, 4, 6, 9].

Poznanie wymienionych zjawisk pozwoli, jak się wydaje, tak wpływać na przebieg procesu krzepnięcia, aby otrzymać odlewy o lepszych własnościach.

W pracy na przykładzie krzepnięcia walca drażonego wzmocnionego rurą będziemy opisywać zjawisko wzajemnego oddziaływania odlewu z rurą wzmacniającą ten odlew oraz odlewu i formy odlewniczej. Analiza ta pozwoli ustalić wpływ tych oddziaływań na własności otrzymanego odlewu. Przykładem takiego odlewu może być okrągła wlewnica dwuwarstwowa. Zaletą wlewnicy wielowarstwowej jest możliwość wymiany wkładki wewnętrznej, co istotnie podwyższa trwałość wlewnicy i obniża koszt wytwarzania wlewków [7]. Istotnym problemem jest tutaj dobór grubości warstw oraz uzyskanie takich pól naprężeń wstępnych we wlewnicy, aby zapewnić optymalne warunki współpracy obu warstw podczas odlewania wlewków.

Okrągłe wlewnice dwuwarstwowe mogą być otrzymywane dwoma sposobami: odlewania warstwy wewnętrznej lub warstwy zewnętrznej. W przypadku odlewania warstwy wewnętrznej istnieje w eksploatacji takiej

wlewnicy możliwość wymiany wylanej "kieszulki" i zastąpienie jej nową. Natomiast w przypadku odlewania warstwy zewnętrznej nie ma w zasadzie możliwości demontażu wlewnicy, jednak sposób ten pozwala otrzymać wlewnice o podwyższonych własnościach.

W niniejszej pracy ograniczamy się do oszacowania wielkości oddziaływań między warstwami podczas krzepnięcia, nie analizując tego zagadnienia dla pełnego zakresu stygnięcia. Rozważania prowadzimy w zakresie sprężystym. Praca jest wstępem do dalszych rozważań nad tym zagadnieniem.

## 2. Równania krzepnięcia

Rozważamy krzepnięcie odlewu-tarczy, ograniczonego od zewnątrz formą odlewniczą, natomiast od wewnątrz rurą metalową (rdzeniem w kształcie rury; zagadnienie osiowoosymetryczne). Prędkość krzepnięcia odlewu determinowana jest z jednej strony prędkością odpływu ciepła do otoczenia poprzez formę i jej pokrycie bądź szczelinę skurczową, natomiast z drugiej strony prędkością odpływu ciepła przez rurę. Zakładamy, że stałe termofizyczne odlewu, rury i formy są niezależne od temperatury oraz że temperatura krzepnięcia jest stała. Powierzchnie rozdziału faz są powierzchniami cylindrycznymi i nie występuje mieszanie w fazie ciekłej metalu. Pomija się również wpływ ciśnienia metalostatycznego fazy ciekłej metalu.

W chwili początkowej ( $\tau = \tau_0$ ) temperatura odlewu jest jednakowa i równa temperaturze zalewania  $T_z$ . Stała jest również temperatura formy  $T_f^0$  oraz temperatura rury  $T_r^0$ . Dla chwili początkowej zakłada się istnienie stałego ciśnienia w cieczy  $p_c$  oraz stałego ciśnienia działającego na rurę  $p_w$ .

Równania różniczkowe opisujące proces krzepnięcia rozważanego odlewu (rys. 1) są następujące (por. [2, 12]):

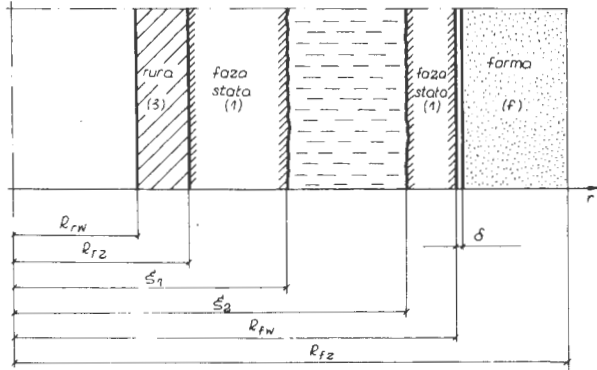
$$a_3 \left( \partial_{rr}^2 T_3 + \frac{1}{r} \partial_r T_3 \right) - \partial_t T_3 = 0 \quad (1)$$

dla

$$\tau \geq 0, \quad r \in (R_{rw}, R_{rz}),$$

(2)

$$a_1 \left( \partial_{rr}^2 T_1 + \frac{1}{r} \partial_r T_1 \right) - \partial_t T_1 = 0$$



Rys. 1. Schemat rozważanego układu

dla

$$\tau \in \langle \Psi_1(0), \Psi_1(\xi_1) \rangle \text{ i } \tau \in \langle \Psi_2(0), \Psi_2(\xi_2) \rangle,$$

$$r \in (R_{rz}, \xi_1) \text{ i } r \in (\xi_2, R_{fw})$$

$$a_2 \left( \partial_{rr}^2 T_2 + \frac{1}{r} \partial_r T_2 \right) - \partial_t T_2 = 0 \quad (3)$$

dla

$$\tau \geq 0, \quad r \in (\xi_1, \xi_2),$$

$$a_f \left( \partial_{rr}^2 T_f + \frac{1}{r} \partial_r T_f \right) - \partial_t T_f = 0 \quad (4)$$

dla

$$\tau \geq 0, \quad r \in (R_{fw}, R_{fz}).$$

Układ powyższych równań jest uzupełniony

- warunkami początkowymi

$$\begin{aligned} T_3(r, 0) &= T_3^0, \quad r \in \langle R_{rw}, R_{rz} \rangle, \\ T_2(r, 0) &= T_2^0, \quad r \in \langle R_{rz}, R_{fw} \rangle, \\ T_f(r, 0) &= T_f^0, \quad r \in (R_{fw}, R_{fz}); \end{aligned} \quad (5)$$

- warunkami brzegowymi

a) dla styku rury z otoczeniem

$$\lambda_3 \left( \frac{\partial T_3}{\partial r} \right) \Big|_{r=R_{rw}} = \alpha_3^* (T_3 \Big|_{r=R_{rw}} - T_{ot.}), \quad \tau \geq 0; \quad (6)$$

b) dla styku rury z odlewem

$$\lambda_3 \left( \frac{\partial T_3}{\partial r} \right) \Big|_{r=R_{rz}} = \lambda_1 \left( \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) \Big|_{r=R_{rz}}, \quad \tau \geq 0; \quad (7)$$

c) dla pokrycia metalowej formy odlewniczej

$$\frac{1}{R} (T_1 \Big|_{r=R_{fw}} - T_f \Big|_{r=R_{fw} + \delta}) = \lambda_f \left( \frac{\partial T_f}{\partial r} \right) \Big|_{r=R_{fw} + \delta}, \quad (8)$$

$$\frac{1}{R} (T_1 \Big|_{r=R_{fw}} - T_f \Big|_{r=R_{fw} + \delta}) = \lambda_1 \left( \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) \Big|_{r=R_{fw}}, \quad (9)$$

$$\tau \in (\Psi(0), \infty),$$

d) dla styku formy z otoczeniem

$$\lambda_f \left( \frac{\partial T_f}{\partial r} \right) \Big|_{r=R_{fz}} = \alpha_f^* (T_f \Big|_{r=R_{fz}} - T_{ot.}), \quad \tau \geq 0, \quad (10)$$

oraz warunkami ciągłości na powierzchniach krzepnięcia

$$\lambda_1(\partial_r T_1)|_{r=\xi_1} - \lambda_2(\partial_r T_2)|_{r=\xi_1} = L \varrho_1 w_1, \quad (11)$$

$$\tau \in \langle \Psi_1(0), \Psi_1(\xi_1) \rangle,$$

$$\lambda_1(\partial_r T_1)|_{r=\xi_2} - \lambda_2(\partial_r T_2)|_{r=\xi_2} = L \varrho_1 w_2, \quad (12)$$

$$\tau \in \langle \Psi_2(0), \Psi_2(\xi_2) \rangle,$$

$$T_1|_{r=\xi_1} = T_2|_{r=\xi_1}, \quad T_1|_{r=\xi_2} = T_2|_{r=\xi_2}. \quad (13)$$

Sformułowane powyżej zagadnienie cieplne dotyczące krzepnięcia odlewu drążonego wzmocnionego rurą wewnętrzną rozwiązywano numerycznie metodą różnic skończonych o schemacie jawnym [12, 13].

### 3. Analiza oddziaływań mechanicznych

W celu oszacowania oddziaływań mechanicznych odlewu-formy i odlewu-zbrojenia korzystamy z następujących związków na naprężenia i przemieszczenia (dla zagadnienia osiowoosymetrycznego rys. 1) [1, 5].

- Rura ( $r \in \langle R_{rw}, R_{rz} \rangle$ )

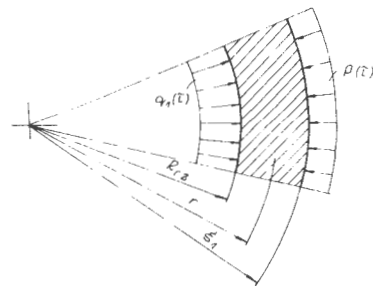
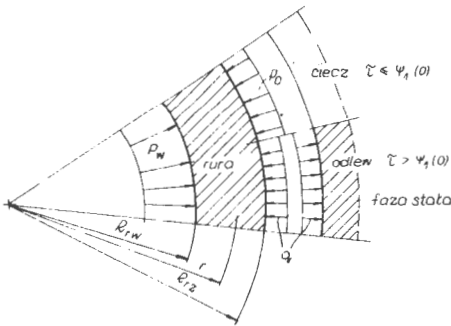
Naprężenia od pola temperatur wynoszą

$$\begin{aligned} \sigma_{3r} = & \frac{\alpha_3 E_3}{1 - \nu_3} \left( \frac{1}{R_{rz}^2} - \frac{1}{R_{rw}^2} \right) \left( 1 - \frac{R_{rw}^2}{r^2} \right) \int_{R_{rw}}^{R_{rz}} T(r, \tau) r dr - \\ & - \frac{1}{r^2} \int_{R_{rw}}^r T(r, \tau) r dr, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\sigma_{3\varphi} = \frac{\alpha_3 E_3}{1 - \nu_3} \left( \frac{1}{R_{rz}^2 - R_{rw}^2} \left( 1 + \frac{R_{rw}^2}{r^2} \right) \int_{R_{rw}}^{R_{rz}} T(r, \tau) r dr + \right. \\ \left. + \frac{1}{r} \int_{R_{rw}}^r T(r, \tau) r dr - T(r, \tau) \right),$$

$$\sigma_{3z} = \frac{\alpha_3 E_3}{1 - \nu_3} \left( \frac{2}{R_{rz}^2 - R_{rw}^2} \int_{R_{rw}}^{R_{rz}} T(r, \tau) r dr - T(r, \tau) \right).$$

Naprężenia od ciśnienia i od oddziaływań, odlewu i formy odlewniczej (rys. 2)



Rys. 2. Obraz oddziaływania rury z fazą ciekłą lub stałą odlewu

Rys. 3. Obciążenie części odlewu od strony rury

$$\sigma_{3r} = \frac{1}{R_{rz}^2 - R_{rw}^2} \left( (R_{rw}^2 p_w - R_{rz}^2 p_o) - \frac{R_{rw}^2 R_{rz}^2 (p_w - p_o)}{r^2} \right),$$

$$\sigma_{3\varphi} = \frac{1}{R_{rz}^2 - R_{rw}^2} \left( (R_{rw}^2 p_w - R_{rz}^2 p_o) + \frac{R_{rw}^2 R_{rz}^2 (p_w - p_o)}{r^2} \right) \quad (15)$$

dla  $\tau \leq \Psi_1(0)$

$$\sigma_{3r} = \frac{1}{R_{rz}^2 - R_{rw}^2} ((R_{rw}^2 p_w - R_{rz}^2 q) - \frac{R_{rw}^2 R_{rz}^2 (p_w - q)}{r^2}),$$

$$\sigma_{3\varphi} = \frac{1}{R_{rz}^2 - R_{rw}^2} ((R_{rw}^2 p_w - R_{rz}^2 q) + \frac{R_{rw}^2 R_{rz}^2 (p_w' - q)}{r^2}) \quad (16)$$

dla  $\tau > \Psi_1(0)$ .

Przemieszczenia od pola temperatur (promieniowe)

$$u_3(r, T) = \frac{1 + \nu_3}{1 - \nu_3} \alpha_3 \left( \frac{r}{R_{rz}^2 - R_{rw}^2} \left( \frac{1 - 3\nu_3}{1 + \nu_3} + \frac{R_{rw}}{r^2} \right) \right.$$

$$\left. \int_{R_{rw}}^{R_{rz}} T(r, \tau) r dr + \frac{1}{r} \int_{R_{rw}}^r T(r, \tau) r dr \right). \quad (17)$$

Przemieszczenia od ciśnień i oddziaływań na styku rury z odlewem są równe

$$u_3(p_w, p_o) \Big|_{r=R_{rz}} = -p_o \frac{R_{rz}}{E_3} \left( \frac{R_{rz}^2 + R_{rw}^2}{R_{rz}^2 - R_{rw}^2} - \nu_3 \right) +$$

$$+ p_w \frac{R_{rw}}{E_3} \cdot \frac{2R_{rw}^2}{R_{rz}^2 - R_{rw}^2} \quad (18)$$

dla  $\tau \leq \Psi_1(0)$

$$u_3(p_w, q) \Big|_{r=R_{rz}} = -q_1 \frac{R_{rz}}{E_3} \left( \frac{R_{rz}^2 + R_{rw}^2}{R_{rz}^2 - R_{rw}^2} - \nu_3 \right) +$$



$$+ p_w \frac{R_{rw}}{E_3} \cdot \frac{2R_{rw}^2}{R_{rz}^2 - R_{rw}^2}$$

dla  $\tau > \Psi_1(0)$ .

- Odlew ( $r \in \langle R_{rz}, \xi_1 \rangle$  i  $r \in \langle \xi_2, R_{fw} \rangle$ )

dla  $r \in \langle R_{rz}, \xi_1 \rangle$  (rys. 3).

Prędkości naprężeń od temperatury określamy wzorami [5, 10]

$$\dot{\sigma}_{1r} = \frac{\alpha_1 E_1}{1 - \nu_1} \left( \frac{1}{\xi_1^2 - R_{rz}^2} \left( 1 - \frac{R_{rz}^2}{r} \right) \int_{R_{rz}}^{\xi_1} \dot{T}(r, \tau) r dr - \frac{1}{r^2} \int_{R_{rz}}^r \dot{T}(r, \tau) r dr \right),$$

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{1\varphi} &= \frac{\alpha_1 E_1}{1 - \nu_1} \left( \frac{1}{\xi_1^2 - R_{rz}^2} \left( 1 + \frac{R_{rz}^2}{r^2} \right) \int_{R_{rz}}^{\xi_1} \dot{T}(r, \tau) r dr + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r^2} \int_{R_{rz}}^r \dot{T}(r, \tau) r dr - \dot{T}(r, \tau) \right); \end{aligned} \quad (19)$$

$$\dot{\sigma}_{1z} = \frac{\alpha_1 E_1}{1 - \nu_1} \left( \frac{2}{\xi_1^2 - R_{rz}^2} \int_{R_{rz}}^{\xi_1} \dot{T}(r, \tau) r dr - \dot{T}(r, \tau) \right).$$

Natomiast prędkości naprężeń od oddziaływań i ciśnienia wyrażone są związkami (por. [2, 5])

$$\dot{\sigma}_{1r} = \frac{1}{\xi_1^2 - R_{rz}^2} \left( (R_{rz}^2 \dot{q} - \xi_1^2 \dot{p}) - \frac{\xi_1^2 R_{rz}^2 (\dot{q} - \dot{p})}{r^2} \right), \quad (19a)$$

$$\dot{\sigma}_{1\varphi} = \frac{1}{\xi_1^2 - R_{rz}^2} \left( (R_{rz}^2 \dot{q} - \xi_1^2 \dot{p}) + \frac{\xi_1^2 R_{rz}^2 (\dot{q} - \dot{p})}{r^2} \right)$$

dla  $r \in \langle \xi_2, R_{fw} \rangle$  (rys. 4).

$$\dot{\sigma}_{lr} = \frac{\alpha_l E_l}{1 - \nu_l} \left( \frac{l}{R_{fw} - \xi_2^2} \left( 1 - \frac{\xi_2^2}{r} \right) \int_{\xi_2}^{R_{fw}} \dot{T}(r, \tau) r dr + \frac{l}{2} \int_{\xi_2}^r \dot{T}(r, \tau) r dr \right), \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{l\varphi} = & \frac{\alpha_l E_l}{1 - \nu_l} \left( \frac{l}{R_{fw} - \xi_2^2} \left( 1 + \frac{\xi_2^2}{r} \right) \int_{\xi_2}^{R_{fw}} \dot{T}(r, \tau) r dr + \right. \\ & \left. + \frac{l}{r^2} \int_{\xi_2}^r \dot{T}(r, \tau) r dr - \dot{T}(r, \tau) \right), \end{aligned}$$

$$\dot{\sigma}_{lz} = \frac{\alpha_l E_l}{1 - \nu_l} \left( \frac{2}{R_{fw} - \xi_2^2} \int_{\xi_2}^{R_{fw}} \dot{T}(r, \tau) r dr - \dot{T}(r, \tau) \right).$$

Wzory określające naprężenia od oddziaływań i ciśnienia dla tej części odlewu są tej samej postaci jak (19a). Należy tylko wstawić odpowiednie promienie i zamienić kolejność  $\dot{p}$  i  $\dot{q}$ .

Prędkości przemieszczeń przykładowo dla zakrzepłej części odlewu od strony rury (rys. 3) określać będziemy następująco (por. (17)):

$$\begin{aligned} \dot{u}_l(r, \tau) = & \frac{1 + \nu_l}{1 - \nu_l} \alpha_l \left( \frac{r}{\xi_1^2 - R_{rz}^2} \left( \frac{1 - 3\nu_l}{1 + \nu_l} + \frac{R_{rz}^2}{r^2} \right) \right. \\ & \left. \int_{R_{rz}}^{\xi_1} \dot{T}(r, \tau) r dr + \frac{l}{r} \int_{R_{rz}}^{\xi_1} \dot{T}(r, \tau) r dr \right). \quad (21) \end{aligned}$$

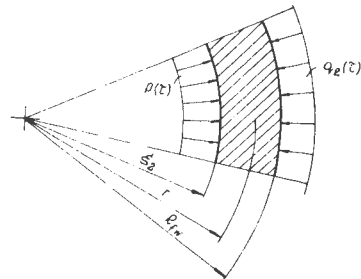
Zależności prędkości przemieszczeń od obciążeń mechanicznych wyrażają się natomiast wzorami (por. (18))

$$\dot{u}_1(\dot{p}, \dot{q}) = -\dot{p}(\tau) \frac{\xi_1}{E_1} \left( \frac{\xi_1^2 + R_{rz}^2}{\xi_1^2 - R_{rz}^2} - \nu_1 \right) + \dot{q}(\tau) \frac{\xi_1}{E_1} \cdot \frac{2R_{rz}^2}{\xi_1^2 - R_{rz}^2} \quad (22)$$

- Forma ( $r \in \langle R_{fw}, R_{fz} \rangle$ )

Dla obszaru formy wzory określające naprężenia i przemieszczenia formy są tej samej postaci jak dla rury (por. wzory 14, 15, 16, 17), wystarczy tylko zmienić odpowiednio promienie. Przemieszczenia natomiast od ciśnienia i oddziaływań  $q_2$  określamy w postaci (por. (22) i rys. 4):

$$u(p_z, p_o) \Big|_{r=R_{fw}} = -p_z \frac{R_{fz}}{E_o} \left( \frac{R_{fz}^2 + R_{fw}^2}{R_{fz}^2 - R_{fw}^2} - \nu_o \right) + p_o \frac{R_{fw}}{E_o} \frac{2R_{fw}^2}{R_{fz}^2 - R_{fw}^2} \quad (23)$$



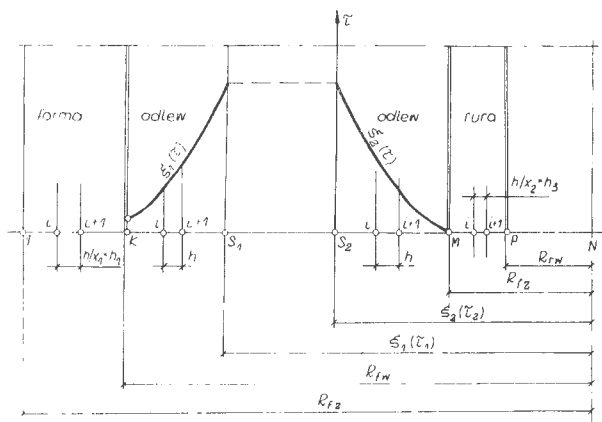
Rys. 4. Obciążenie części odlewu od strony formy

dla  $\tau \leq \Psi_2(0)$

$$u(p_z, q_2) \Big|_{r=R_{fw}} = -p_z \frac{R_{fz}}{E_o} \left( \frac{R_{fz}^2 + R_{fw}^2}{R_{fz}^2 - R_{fw}^2} - \nu_o \right) + q_2 \frac{R_{fw}}{E_o} \frac{2R_{fw}^2}{R_{fz}^2 - R_{fw}^2}$$

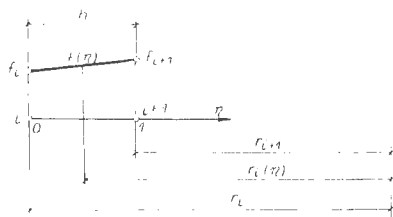
dla  $\tau > \Psi_2(0)$ .

Całość zagadnienia przedstawionego powyżej rozważono w układzie dyskretyzowanym, co pozwoliło na łatwe korzystanie z wartości temperatur otrzymywanych z numerycznego rozwiązania zagadnienia cieplnego. Rysunek 5 obrazuje poszczególne punkty rozważanej rury, odlewu i formy odlewniczej, przy czym dla formy wyróżniono K punktów z przedziału  $\langle R_{fz}, R_{fw} \rangle$ , dla odlewu M-K punktów z przedziału  $\langle R_{fw}, R_{rz} \rangle$ , dla rury P-M punktów z przedziału  $\langle R_{rz}, R_{rw} \rangle$ . Dla każdego wyróżnionego punktu odlewu określono czas krzepnięcia z zagadnienia cieplnego, a zatem określono funkcję  $\xi_1(\tau)$  i  $\xi_2(\tau)$  lub funkcje odwrotne  $\Psi_1(\xi_1)$  i  $\Psi_2(\xi_2)$ .



Rys. 5. Sposób dyskretyzacji rozważanego układu

W rozwiązaniu założono liniową postać występujących funkcji dla każdego przedziału określonego dwoma sąsiednimi wartościami. Jeśli postać funkcji początkowych była zbyt złożona, przeprowadzono całkowanie numeryczne metodą Simpsona, sprowadzając wcześniej każdy rozważany przedział do przedziału  $\langle 0, 1 \rangle$  (rys. 6).



Rys. 6. Znormalizowana współrzędna dla elementu

Wprowadzając wcześniej każdy rozważany przedział do przedziału  $\langle 0, 1 \rangle$  (rys. 6).

Mamy zatem

$$f(\eta) = \varphi_i(\eta) f_i + \varphi_{i+1}(\eta) f_{i+1}, \quad (24)$$

gdzie

$$\varphi_i(\eta) = 1 - \eta, \quad \varphi_{i+1} = \eta, \quad (25)$$

stąd

$$f(\eta) = f_i + \eta(f_{i+1} - f_i). \quad (26)$$

Dla promienia

$$r(\eta) = r_i - \eta(r_i - r_{i+1}), \quad (27)$$

stąd różniczkowy przyrost promienia

$$dr = -(r_i - r_{i-1}) d\eta = -hd\eta. \quad (28)$$

Oczywiście ze względu na niejednorodną siatkę w obszarze formy, odlewu i rury za  $h$  należy wstawić odpowiednio  $h/x_1$  dla obszaru formy i  $h/x_2$  dla obszaru rury. Całka rozważanego obszaru jest równa sumie całek obliczonych na podobszarach  $\langle 0, 1 \rangle$ .

Poszukiwane wartości naprężeń i przemieszczeń w obszarze odlewu wyrażone początkowo w prędkościach ze względu na rozważanie ciała narastającego wynoszą odpowiednio:

- dla brzołu odlewu (styk: odlew-forma lub odlew-rura)

$$\sigma(r, \tau) \Big|_{r=R} = \int_0^{\tau} \dot{\sigma}(r, \tau) d\tau, \quad (29)$$

$$u(r, \tau) \Big|_{r=R} = \int_0^{\tau} \dot{u}(r, \tau) d\tau;$$

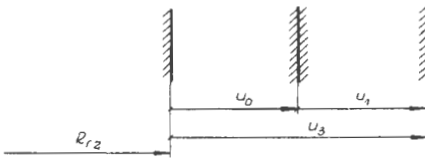
- dla dowolnego punktu odlewu

$$\sigma(r, \tau) = \int_{\tau^*}^{\tau} \dot{\sigma}(r, \tau) d\tau, \quad (30)$$

$$u(r, \tau) = \int_{\tau^*}^{\tau} \dot{u}(r, \tau) d\tau,$$

gdzie  $\tau^*$  jest czasem, w którym rozważany punkt odlewu przechodzi z fazy ciekłej do fazy stałej [10].

Przejdźmy zatem do określenia oddziaływań mechanicznych na brzegach forma-odlew i odlew-rura. Ze względu na identyczność zagadnienia przeprowadzimy tylko krótkie rozważania dla styku odlewu i rury. Na styku tych dwóch obszarów musi być spełniony warunek ciągłości przemieszczeń [1, 10] (rys. 7). Przemieszczenie  $u_0$  jest wstępnym przemieszczeniem zewnętrznej ścianki rury w chwili osiągnięcia przez tę ściankę tem-

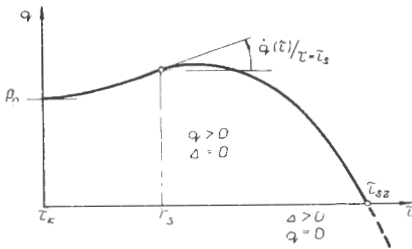


Rys. 7. Przeszczenia brzegu na styku odlewu i rury

peratury krzepnięcia,  $u_3$  zaś jest przeszczeniem zewnętrznej ścianki rury w chwili  $\tau$  przebiegu procesu krzepnięcia lub stygnięcia, a  $u_1$  jest podobnym przeszczeniem, ale dotyczącym ścianki odlewu od strony rury. Na podstawie rys. 7 mamy

$$u_0 + u_1 - u_3 \geq 0, \quad (31)$$

przy czym warunek  $u_0 + u_1 - u_3 > 0$  zachodzi w przypadku pojawienia się szczeliny  $\Delta$ . Związek (31) przyjmuje zatem dwie postacie



$$u_0 + u_1 - u_3 = 0, \quad q > 0, \quad \Delta = 0, \quad (32)$$

i

$$u_0 + u_1 - u_3 = \Delta, \quad q = 0, \quad \Delta > 0. \quad (33)$$

Przeszczenia występujące w (31) są funkcjami

Rys. 8. Obszar określoności oddziaływań

$$u_0 = u_0(p_0, T) \Big|_{\tau = \tau_k},$$

$$u_1 = u_1(q) + u_1(p) + u_1(T), \quad (34)$$

$$u_3 = u_3(q) + u_3(T),$$

gdzie ciśnienie fazy ciekłej  $p = p(\tau)$  może być zmienne w przebiegu procesu krzepnięcia. Warunkiem początkowym dla  $q$  jest (rys. 8)

$$q \Big|_{\tau = \tau_k} = p_0. \quad (35)$$

W realizacji numerycznej określano schematem jawnym z równania (32) wartość oddziaływania  $q = q(\tau_s)$  dla kolejnych kroków czasowych. W przy-

padku gdy wielkość oddziaływania  $q(\tau_s)$  w kolejnym kroku czasowym przyjmowała wartość mniejszą od zera ( $q(\tau_{s+1}) < 0$ ), przez iterację określono czas  $\tau_{sz}$  pojawienia się szczeliny, przyjmując w dalszym procesie wartości oddziaływania równe zeru

$$q(\tau) \Big|_{\tau > \tau_{sz}} = 0. \quad (36)$$

Z równania (33) określono wielkość powstałej szczeliny  $\Delta$ .

#### 4. Obliczenia

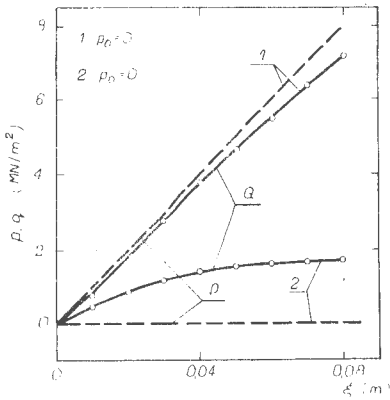
W celu częściowej analizy przedstawionego zagadnienia przeprowadzono obliczenia numeryczne. W obliczeniach przyjęto następujące stałe termofizyczne (tab. 1). Ponadto przyjęto:

Tabela 1. Stałe termofizyczne i wartości promieni

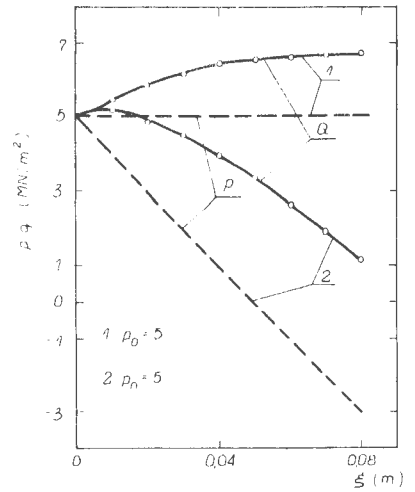
Lp.	Wielkość	Jednostka	Wartość			Forma
			rura	Odlew		
				faza ciekła	faza stała	
1	$R_w$	m	0,1		0,15	0,25
2	$R_r$	m	0,15		0,25	0,50
3	$\rho^z$	kg/m <sup>3</sup>	7000	7200	7500	1600
4	$c$	J/kg K	600	837	540	1080
5	$\lambda$	W/m K	54	26	50	1,3
6	$\alpha^*$	W/m <sup>2</sup> K	2000			600
7	$\alpha$	1/K	$1,2 \cdot 10^{-6}$		$1,2 \cdot 10^{-6}$	
8	$E$	MN/m <sup>2</sup>	$2 \cdot 10^5$		$4 \cdot 10^4$	
9	$\nu$		0,3		0,3	

$$T_{ot} = 300, T_r^o = 400, T_z = 1500, T_k = 1450, T_f^o = 300, \beta_1 = 600, \beta_2 = 300, L = 270.$$

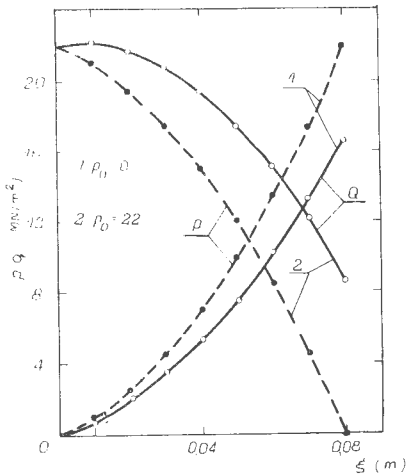
Obliczenia przeprowadzono dla dwóch przypadków. W pierwszym obliczono wartości oddziaływań  $q$  między rurą i odlewem dla różnego ciśnienia początkowego  $p_0$  i zmiennego ciśnienia w fazie ciekłej podczas krzepnięcia (rys. 9, 10, 11). Ta część obliczeń dotyczy tylko zakresu krzepnięcia. W drugim przypadku obliczono wartości oddziaływań  $q$  odlewu z



Rys. 9. Oddziaływanie rury z krzepnącym odlewem



Rys. 10. Oddziaływanie rury z krzepnącym odlewem



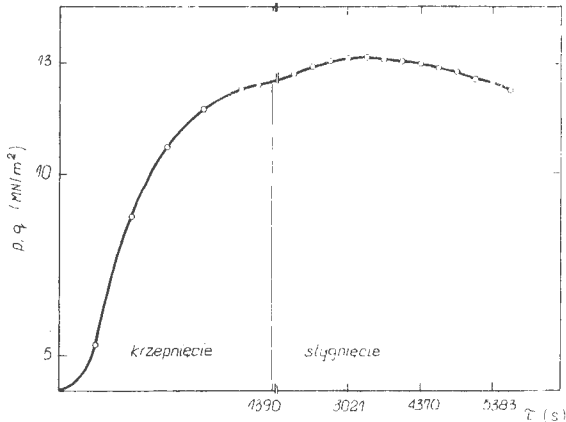
Rys. 11. Oddziaływanie rury z krzepnącym odlewem

rurą podczas krzepnięcia i stygnięcia odlewu. Wyniki tych obliczeń przedstawiono na rys. 12.

Wyniki obliczeń zamieszczone na rys. 9, 10, 11 i 12 świadczą o tym, że zmieniając parametry krzepnięcia można w istotny sposób wpływać na wielkość oddziaływań między rurą i krzepnącym odlewem.

Znajomość zależności oddziaływań między warstwą zewnętrzną i wewnętrzną okrągłej wlewnicy dwuwarstwowej od parametrów krzepnięcia pozwoli odpowiednio sterować procesem krzepnięcia odlewanej warstwy tak, aby między warstwami nie tworzyła się szczelina oraz aby oddziaływania między nimi nie były zbyt wysokie.





Rys. 12. Oddziaływanie rury z krzepnącym i stygnącym odlewem

#### Literatura

1. A. Bokota, J. Kidawa-Kukla, R. Parkitny, L. Tomski, Naprężenia w odlewie i formie odlewniczej walca, *Krzepnięcie Metali i Stopów*, 4 (1981) 114-143.
2. A. Bokota, Termodynamika krzepnięcia odlewu, którego materiał zawiera domieszki. Praca doktorska, Częstochowa, 1981; nie publikowana.
3. I.N. Diengin, W.W. Mironienko, W.J. Woronow, Połączenie obieguglerozennowo słoja w czugunnych otlivkach powierzchnostnym armirowaniem ich staloj 08 sp. Lit. Proizw., 3 (1973) 26-27.
4. Z. Górny, Odlewy zbrojne, *Mały poradnik odlewnika*, WNT, Warszawa 1965, s. 529.
5. J. Lipka, *Wytrzymałość maszyn wirnikowych*, Warszawa 1967.
6. R.M. Ljubojevic, Neka mehanicka svojstva kompozicionich materiala ostvarenih makroarmirowaniem siwog liwa celicnim jezgrima. Praca doktorska, Beograd 1976; nie publikowana.
7. K. Mazur, Modele wariacyjne procesów cieplnych zachodzących przy krzepnięciu odlewów o złożonej geometrii. Praca doktorska, Gliwice 1979; nie publikowana.

8. B.J. Miedowar, W.J. Sajenko, O powiedienii makrochłodilnikow w metalliczeskom rasplawie, Dokl. AN SSSR, 251, 1 (1960) 90-91.
9. M. Misiąg, Żeliwo zbrojone, Prace Instytutu Odlewnictwa, 2 (1952) 25-32.
10. R. Parkitny, Naprężenia w odlewach. Stadium krzepnięcia. Praca habilitacyjna nr 15, Częstochowa 1977.
11. Paton W.E., Miedowar W.J. red., Mnogoslojnaja stal w swarnych konstrukciach, Naukowa Dumka, Kijew 1984.
12. L. Smrha, Tuhnuti a krystalizace ocelowych ingotu, SNTL, Praha 1983.
13. J. Szargut, Metody numeryczne w obliczeniach cieplnych pieców przemysłowych, Wyd. Śląsk, Katowice 1977.